Một bổ đề về liên hợp đẳng giác

Nguyễn Văn Linh

GV trường THPT Chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội

Tóm tắt nội dung

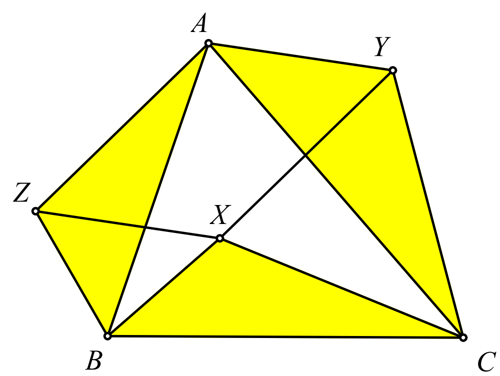
Trong bài viết này, chúng ta tìm hiểu về một bổ đề liên quan đến tâm vị tự quay của các cặp điểm liên hợp đẳng giác. Bài viết đưa ra những khai thác phát triển và một số ứng dụng của bổ đề trong giải toán.

Ta bắt đầu với bài toán sau.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P, P' và Q, Q' là hai cặp liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm vị tự quay của PQ' và QP' nằm trên (O).

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC. Dựng các điểm X, Y, Z thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC chứa A và Y, Z nằm ngoài tam giác ABC sao cho $\triangle AZB \sim \triangle CXB \sim \triangle CYA$. Khi đó $AYXZ$ là hình bình hành.

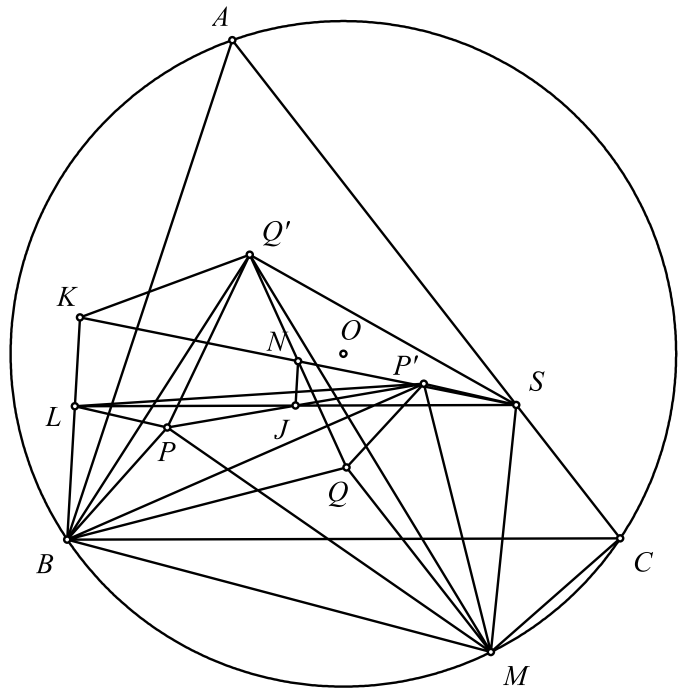


Chứng minh. Ba tam giác AZB, CXB, CYA đồng dạng cùng hướng, suy ra $\triangle CXY \sim \triangle CBA$ và $\triangle BZX \sim \triangle BAC$.

Từ đó $\dfrac{XY}{AB} = \dfrac{CX}{CB} = \dfrac{AZ}{AB}$ và $\dfrac{XZ}{AC} = \dfrac{BX}{BC} = \dfrac{AY}{AC}$.

Suy ra $XY = AZ$ và $XZ = AY$. Vậy $AYXZ$ là hình bình hành. □

Trở lại bài toán.



Gọi M là tâm vị tự quay của PQ' và QP'.

Dựng điểm S sao cho $\triangle BPM \overset{+}{\sim} \triangle P'SM$.

Suy ra $\dfrac{MS}{MQ'} = \dfrac{MS}{MP'} \cdot \dfrac{MP'}{MQ'} = \dfrac{MP}{MB} \cdot \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{MQ}{MB}$.

Mà $\angle Q'MS = \angle Q'MP' + \angle P'MS = \angle PMQ + \angle BMP = \angle BMQ$.

Suy ra $\triangle BMQ \overset{+}{\sim} \triangle Q'MS$.

Dựng hai điểm L, K thỏa mãn $\triangle BLP \overset{+}{\sim} \triangle BP'M \overset{+}{\sim} \triangle PSM$, $\triangle BKQ' \overset{+}{\sim} \triangle BQM \overset{+}{\sim} \triangle Q'SM$.

Áp dụng bổ đề 1 cho hai tam giác BPM và $BQ'M$ ta có $LPSP'$, $KQ'SQ$ là hình bình hành.

Suy ra $LK \parallel NJ$.

Mà $\angle LBP = \angle P'BM$ suy ra BM, BL đẳng giác trong $\angle PBP'$ hay đẳng giác trong $\angle BAC$.

Tương tự BK, BM đẳng giác trong $\angle BAC$ suy ra B, L, K thẳng hàng và $BK \parallel NJ$.

Tương tự đường đẳng giác với CM trong $\angle ACB$ song song với NJ.

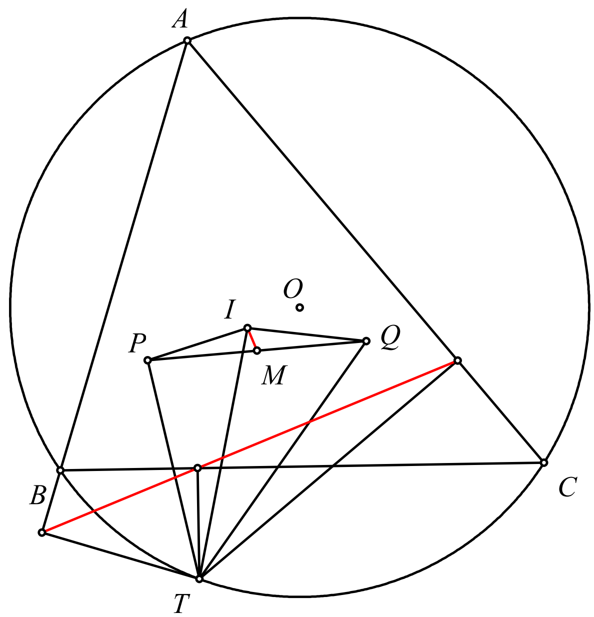
Suy ra đường đẳng giác với BM, CM trong góc B, C song song voi nhau.

Vậy $M \in (O)$. $\square$

Nhận xét. Qua phép chứng minh trên, ta thấy đường đẳng giác với AM, BM, CM trong góc A, B, C đều song song với đường thẳng NJ nối trung điểm của PP' và QQ'. Do đó đường thẳng Simson của M ứng với tam giác ABC vuông góc với NJ.

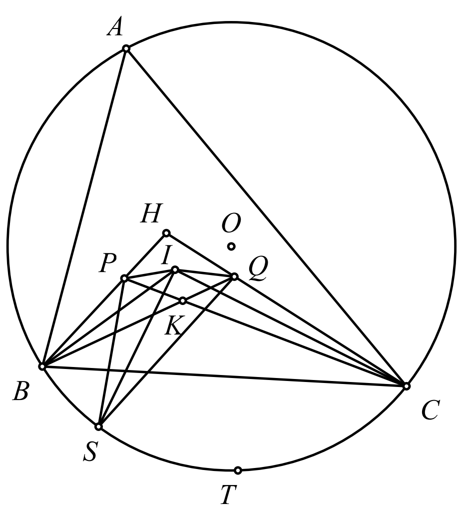
Cho một cặp điểm liên hợp đẳng giác trùng nhau và trùng tâm nội tiếp I (hoặc tâm bàng tiếp). Ta biết rằng điểm I-dumpty T của tam giác IPQ là điểm thỏa mãn $\triangle TPI \sim \triangle TIQ$, cũng là tâm vị tự quay của PI và IQ. Từ đó thu được kết quả sau:

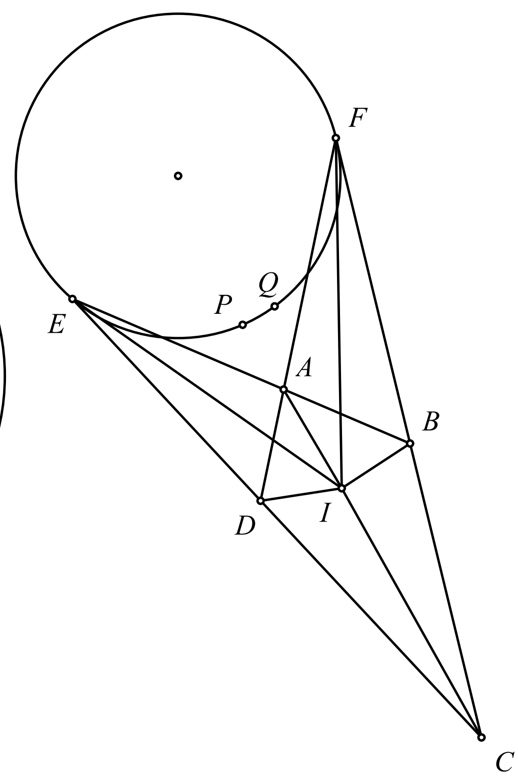
Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có I là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp). P, Q là một cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Gọi T là điểm I-dumpty của tam giác IPQ. Khi đó T nằm trên (O) và đường thẳng Simson của T ứng với tam giác ABC vuông với đường trung tuyến ứng với đỉnh I của tam giác IPQ.



Nhận xét. Nếu gọi H là giao điểm của BP và CQ, K là giao điểm của BQ và CP thì H và K cũng là một cặp liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Đồng thời điểm I-dumpty của tam giác IHK cũng nằm trên (O). Loại bỏ điểm A ta thu được bài toán mới như sau.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. Phân giác $\angle E$ và $\angle F$ cắt nhau tại I. Gọi P, Q lần lượt là điểm I-dumpty của tam giác IAC, IBD. Chứng minh rằng P, Q, E, F đồng viên.

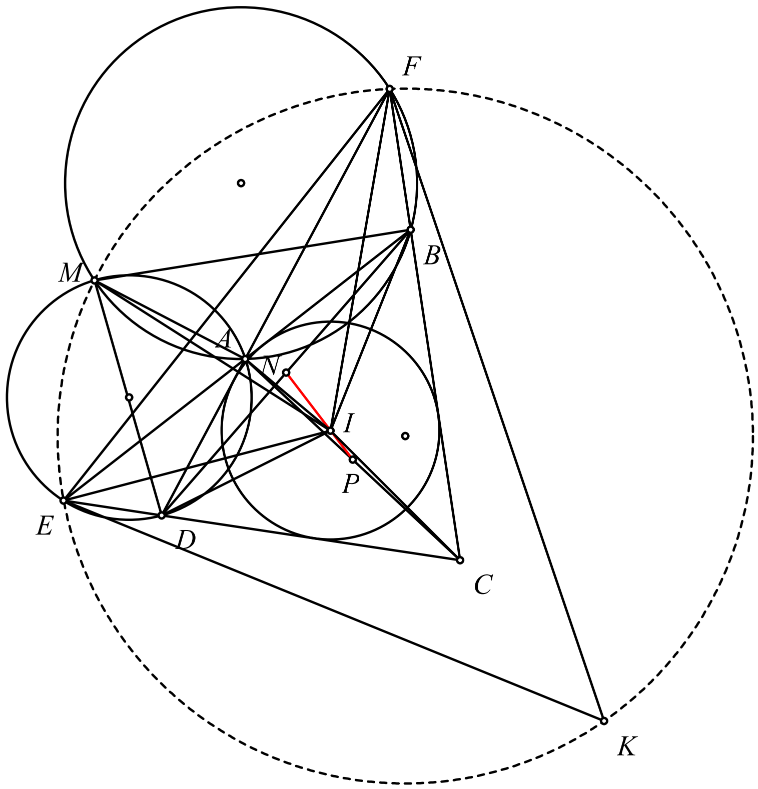




Nhận xét. Bằng phép cộng góc đơn giản, có thể thấy đường tròn đi qua P, Q, E, F cũng đi qua điểm Miquel của tứ giác $ABCD$.

Nếu tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I, ta thu được một kết quả thú vị:

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. M là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$. Khi đó M là điểm I-dumpty của các tam giác IAC, IBD, IEF.



Lời giải. Gọi P, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Khi đó I, P, N thẳng hàng (đường thẳng Newton của tứ giác ngoại tiếp).

Gọi K là giao điểm của đường thẳng đối xứng với EF qua IE, IF. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác EFK và A, C; B, D là hai cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác EFK.

Áp dụng bài toán 2 ta có đường thẳng Simson của điểm I-dumpty của tam giác IAC và IBD ứng với tam giác EFK đều có phương vuông góc với đường thẳng đi qua I, N, P. Do đó điểm I-dumpty của hai tam giác này trùng nhau, gọi là M.

Theo tính chất cơ bản của điểm dumpty, ta có $\triangle MBI \sim \triangle MID$ và $\triangle MAI \sim \triangle MIC$.

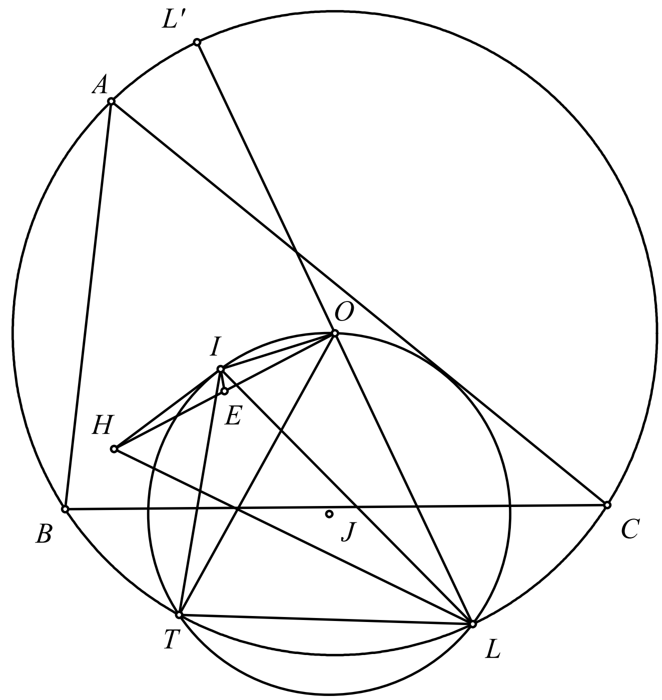
Do đó $\angle IMB = \angle(IB, ID)$, $\angle IMA = \angle(IA, IC)$. Suy ra $\angle AMB = \angle(IA, IC) - \angle(IB, ID) = \angle AFB$.

Suy ra $M \in (FAB)$. Tương tự ta thu được M là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$. Do vai trò của A, C; B, D và E, F như nhau nên hoàn toàn tương tự M cũng là điểm I-dumpty của tam giác IEF.

□

Tiếp theo ta thử xét một cặp liên hợp đẳng giác quen thuộc: trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp. Bài toán thu được khá thú vị.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với trực tâm H. I là tâm nội tiếp. T là điểm anti-Steiner của HI. Chứng minh rằng HI tiếp xúc với (IOT).



Lời giải. Gọi L là điểm I-dumpty của tam giác HIO. E là tâm đường tròn Euler. Theo bài 2, L nằm trên (O) và đường thẳng Simson của L vuông góc với IE.

Kẻ đường kính LL' cua (O). Ta có đường thẳng Simson của L' song song với IE.

Gọi $d_{L'}, d_T$ lần lượt là đường thẳng Simson của L' và T.

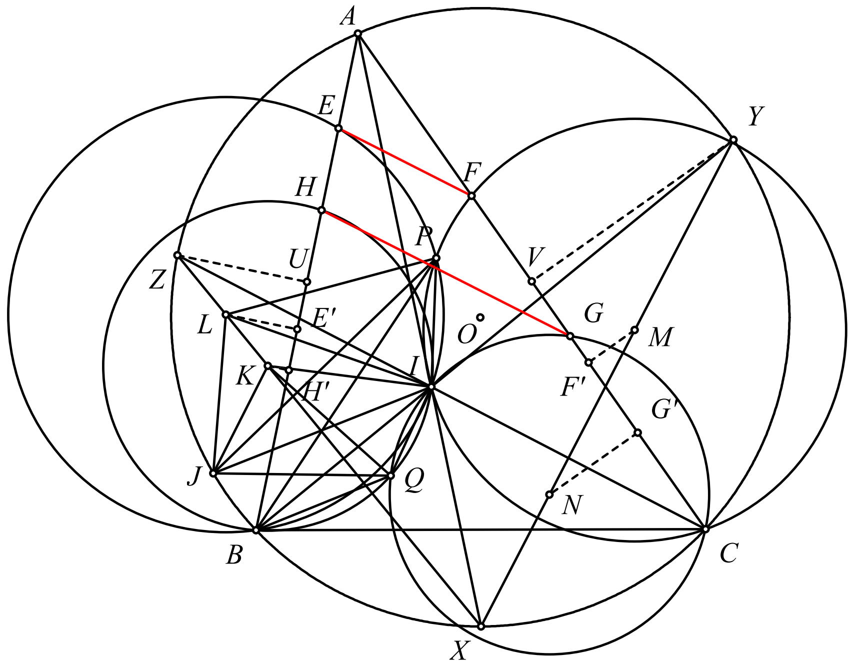
Với chú ý rằng IL là đường đối trung của tam giác HIO, ta có $\angle OTL = \angle OLT = \dfrac{1}{2} sd\ \overset{\frown}{TL'} = \angle(d_{L'}, d_T) = \angle HIE = \angle LIO$.

Suy ra tứ giác $IOLT$ nội tiếp.

Mà $\triangle HIL \sim \triangle IOL$ nên HI tiếp xúc với (OIL). Bài toán được chứng minh. $\square$

Tiếp theo là một tính chất khác có thể áp dụng bài 2.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có I là tâm đường tròn nội tiếp, P, Q là một cặp liên hợp đẳng giác. (BIP), (BIQ) cắt AB lần lượt tại E, H. (CIP), (CIQ) cắt AC lần lượt tại F, G. Chứng minh rằng $EF \parallel HG$.



Lời giải. Lời giải sau đây của bạn **Trần Trung Khang**, học sinh trường PTNK, ĐHKHTN TPHCM.

Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm chính giữa cung BC, CA, AB của (O). K, L, N, M lần lượt là tâm của (BIQ), (BIP), (CIQ), (CIP).

Gọi U, E', H', V, F', G' lần lượt là trung điểm của AB, EB, HB, AC, FC, GC. J là điểm I-dumpty của tam giác IPQ.

Ta có I là tâm của phép vị tự quay f biến PI thành IQ. Mà $\angle ILP = 2\angle IBP = 2\angle IBQ = \angle IKQ$ nên $f(L) = K$.

Tương tự $f(M) = N$.

Ta thu được $\triangle JLK \sim \triangle JMN$.

Mà L, K nằm trên XZ, M, N nằm trên XY nên LK giao MN tại X. Ta thu được (XKN), (XLM), (XYZ) đồng quy tại X và J.

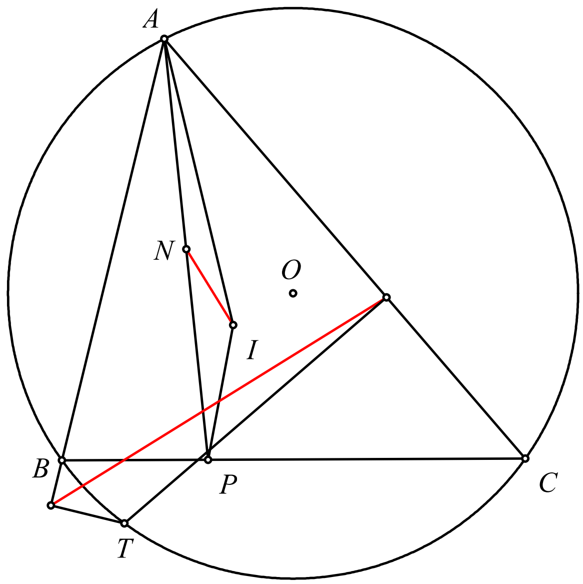
Suy ra $\dfrac{LZ}{LK} = \dfrac{MY}{MN}$. Lại có U, E', H' lần lượt là hình chiếu của Z, L, K trên AB, V, F', G' lần lượt là hình chiếu của Y, M, N trên AC nên $\dfrac{E'U}{H'U} = \dfrac{F'V}{G'V}$. Sử dụng phép vị tự tâm B và tâm C tỉ số 2 ta thu được $\dfrac{EA}{HA} = \dfrac{FA}{GA}$.

Vậy $EF \parallel HG$.

$\square$

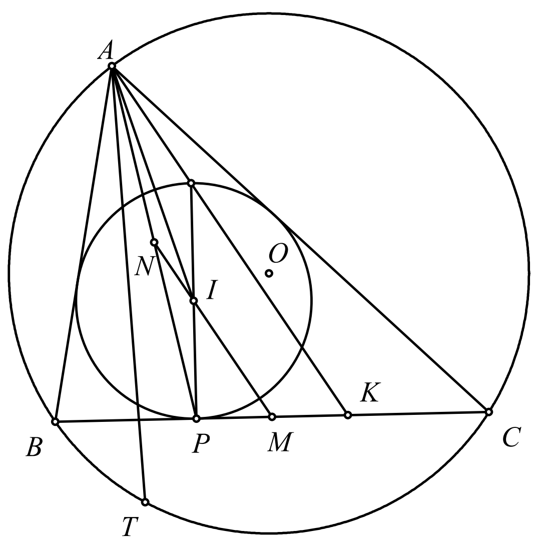
Bây giờ ta để ý rằng một điểm P bất kì nằm trên cạnh BC của tam giác ABC đều là điểm liên hợp đẳng giác của A trong tam giác ABC. Do đó ta có kết quả sau.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với I là tâm đường tròn nội tiếp. P là điểm bất kì nằm trên BC. Gọi T là điểm I-dumpty của tam giác AIP. N là trung điểm của AP. Khi đó T nằm trên (O) và đường thẳng Simson của T ứng với tam giác ABC vuông góc với IN.



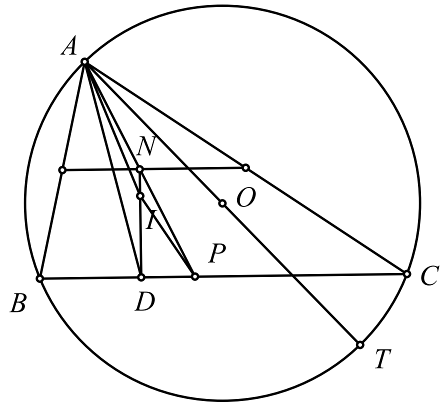
Nhận xét. Khảo sát một vài vị trí đặc biệt, ta thấy rằng khi $IP \perp BC$, IN đi qua trung điểm M của BC. Mà IM song song với đường thẳng nối A với tiếp điểm K của đường tròn bàng tiếp góc A với BC. Do đó AT và AK đẳng giác trong $\angle BAC$. Suy ra T là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O). Ta thu được kết quả sau:

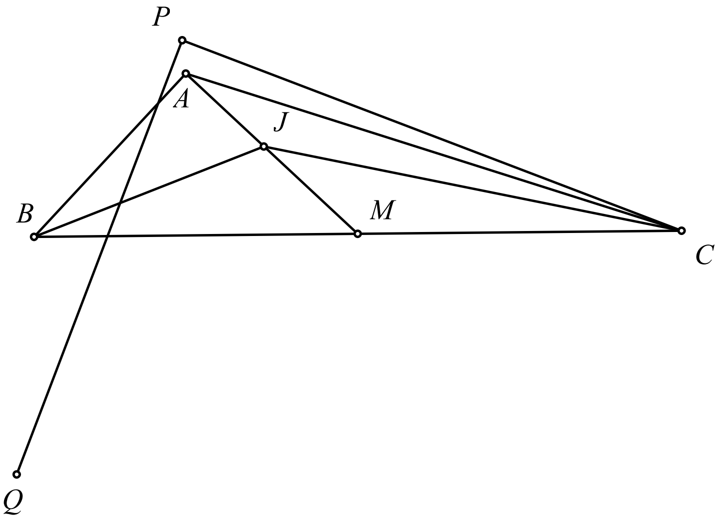
Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với BC tại P. Khi đó điểm I-dumpty của tam giác AIP là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O).



Nhận xét. Nếu $IN \perp BC$, ta có đường thẳng Simson của T vuông góc với IN nên có phương trùng với phương của BC. Do đó AT là đường kính của (O). Nếu coi tam giác AIP như tam giác ABC, ta có thể đổi mô hình và thu được bài toán sau.

Bài 9. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. J là điểm bất kì trên AM. P, Q lần lượt là điểm J-dumpty của tam giác BJC, AJC. Giả sử $\angle BAM = 90°$. Chứng minh rằng $\angle CQP = 90°$.

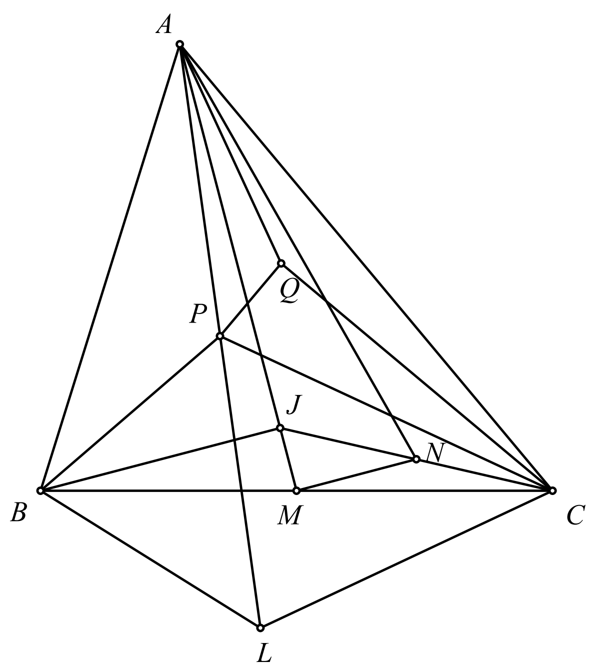




Xin giới thiệu tới bạn đọc một lời giải trực tiếp cho bài 8 của bạn *Nguyễn Đình Tùng*, HS THPT chuyên KHTN.

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán như sau:

Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. J là hình chiếu của B trên AM. Gọi P, Q lần lượt là điểm A-dumpty của tam giác ABC, AJC. Chứng minh rằng $\angle CQP = 90°$.



Gọi N là trung điểm của JC. Ta sẽ chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle CQP$.

Thật vậy, gọi L đối xứng với A qua P. Ta có tứ giác $ABLC$ điều hòa, do đó $\triangle ABL \sim \triangle AMC$.

Ta thu được $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AL}$, lại có $\triangle APB \sim \triangle CPA$ suy ra $AM = \dfrac{AC \cdot AB}{2AP} = \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{AC^2}{2CP}$.

Áp dụng tương tự cho tam giác AJC, ta có $AN = \dfrac{AC^2}{2CQ}$.

Từ đó $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{CQ}{CP}$.

Mà $\angle MAN = \angle MAC - \angle NAC = \angle PAB - \angle QAM = \angle PCA - \angle QCA = \angle PCQ$.

Suy ra $\triangle AMN \sim \triangle CQP$ $(c.g.c)$.

Vậy $\angle CQP = \angle AMN = \angle BJM = 90°$. □

Tiếp tục khai thác cấu hình trên, ta thu được một kết quả khá đẹp.

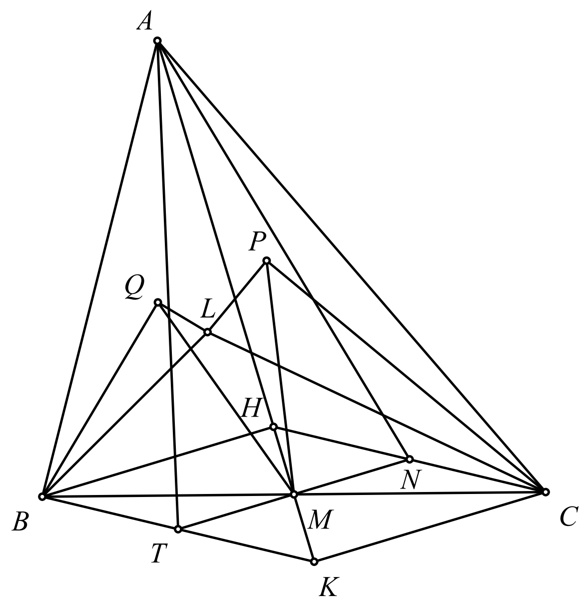
Bài 10. Cho tam giác ABC. M là trung điểm BC. H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên AM. Gọi P, Q lần lượt là điểm A-dumpty của tam giác AHC, AKB. Chứng minh rằng $MP = MQ$.

Lời giải. Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Dựng ra ngoài hai tam giác AEC, AFB vuông tại E, F và đồng dạng. Khi đó $ME = MF$.

Đây là một bổ đề quen thuộc, bạn đọc có thể lấy I, J lần lượt là trung điểm của AC, AB sau đó chứng minh hai tam giác MIE và FJM bằng nhau.

Trở lại bài toán.



Gọi L là điểm A-dumpty của tam giác ABC. N, T lần lượt là trung điểm của CH, BK.

Theo phép chứng minh bài 8, ta có $\triangle CPL \sim \triangle ANM$, $\triangle BQL \sim \triangle ATM$.

Mà M là trung điểm của NT nên $\triangle ANM = \triangle ATM$.

Từ đó $\triangle CPL \sim \triangle BQL$.

Áp dụng bổ đề cho tam giác BLC với hai điểm P, Q ta thu được $MP = MQ$. $\square$

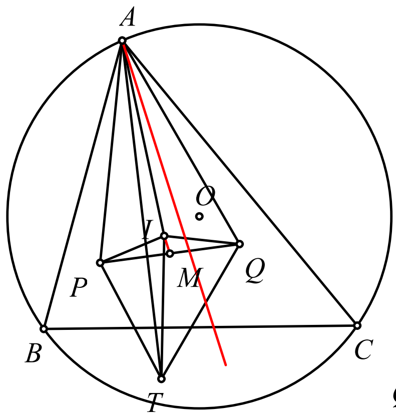
Cuối cùng bạn đọc chú ý rằng chiều đảo của bài toán 2 vẫn đúng.

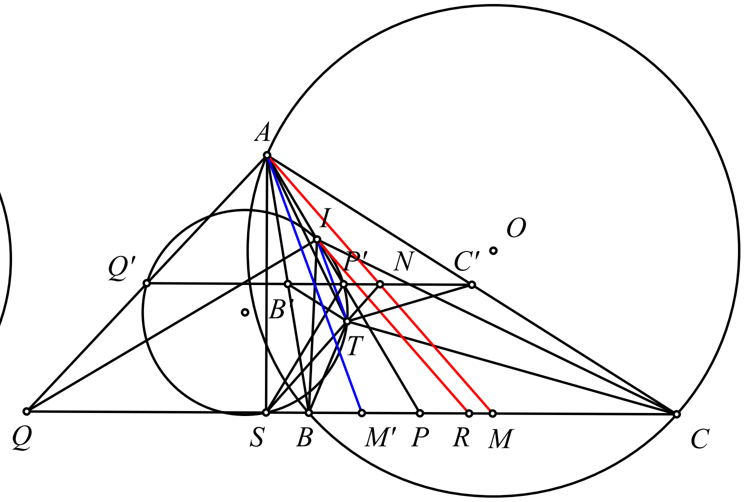
Bài 11. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có I là tâm nội tiếp. P, Q là hai điểm bất kì. T là điểm I-dumpty của tam giác IPQ. M là trung điểm của PQ. Giả sử T thuộc (O) và đường thẳng Simson của T vuông góc với IM thì P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có I là tâm nội tiếp. P, Q bất kì. T là điểm I-dumpty của tam giác IPQ. AT cắt (O) tại X. Khi đó đường thẳng Simson của X ứng với tam giác ABC vuông góc với IM khi và chỉ khi AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$.

Phép chứng minh sau dựa trên lời giải của bạn **Trương Tuấn Nghĩa**, cựu HS THPT chuyên KHTN, ĐHQGHN, thành viên đội tuyển IMO Việt Nam 2020, 2021.





Chứng minh. Ta đổi mô hình của bổ đề về dạng sau:

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, T là điểm A-dumpty của tam giác ABC. I là điểm bất kì. IR đẳng giác với IT trong $\angle BIC$. Khi đó $IR \parallel AM$ khi và chỉ khi IA là phân giác của $\angle BIC$.

Chiều đảo.

Gọi Q là điểm trên BC sao cho $(PQ, BC) = -1$. Kẻ $AS \perp BC$.

Gọi B', C', Q', P', N lần lượt là trung điểm của AB, AC, AQ, AP, AM.

Ta có tứ giác $AB'TC'$ là tứ giác điều hòa nên NB' là phân giác của $\angle ANT$.

A, S đối xứng qua $B'C'$ nên N, T, S thẳng hàng.

Ta lại có $\triangle NAB' \sim \triangle NB'T$ nên $NT \cdot NS = NT \cdot NA = NB'^2$.

Theo hệ thức Newton, $MP \cdot MQ = MB^2$ suy ra $NP' \cdot NQ' = NB'^2$ (vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$).

Suy ra $NP' \cdot NQ' = NT \cdot NS$. Do đó T thuộc đường tròn Euler của tam giác APQ.

Lại có $(PQ, BC) = -1$ và IP là phân giác $\angle BIC$ nên $QI \perp AP$, suy ra I thuộc đường tròn Euler của tam giác APQ.

Suy ra $\angle RIP = \angle TIP' = \angle P'SN = \angle P'AN$.

Vậy $AM \parallel IR$.

Chiều thuận.

AI cắt BC tại P. Dựng Q thuộc BC sao cho $(PQ, BC) = -1$. Kẻ $QI' \perp AP$ thì $I'A$ là phân giác $\angle BI'C$. $I'R'$ đối xứng với $I'T$ qua AP.

Theo chiều đảo, $I'R' \parallel AM$. Do đối xứng trục thì $I'T \parallel AM'$.

Lại có $IR \parallel AM$ nên theo đối xứng trục, $IT \parallel AM'$.

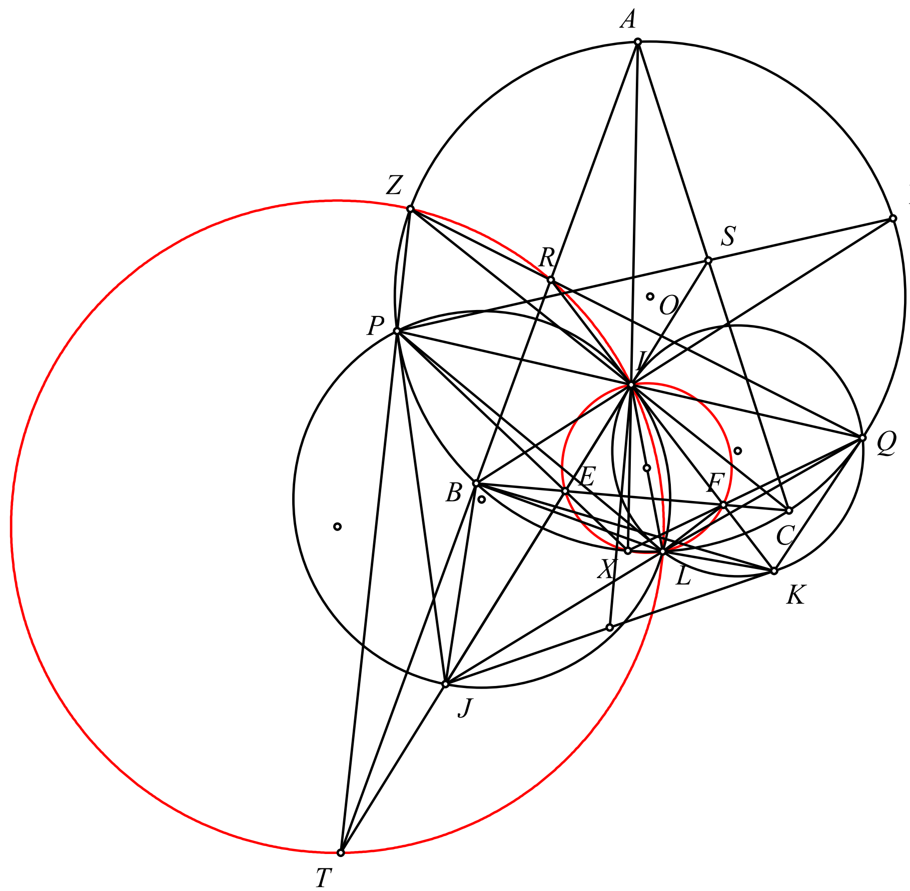
Do đó $I' \equiv I$. Vậy IA là phân giác của $\angle BIC$. □

Trở lại bài toán.

Theo bổ đề trên, AP, AQ đẳng giác trong góc A. Tương tự BP, BQ đẳng giác trong góc B, suy ra P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. □

Chiều đảo của bài toán 2 là một phương pháp hay để chứng minh hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác.

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có I là tâm nội tiếp. Đường thẳng bất kì qua I cắt (O) tại P, Q. AI giao (O) tại D. DP, DQ cắt BC tại E, F. IE cắt tiếp tuyến tại P của (O) tại J. IF cắt tiếp tuyến tại Q của (O) tại K. Chứng minh rằng J, K liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.



Lời giải. Ta có $XE \cdot XP = XF \cdot XQ = XI^2$ suy ra $\angle EIX + \angle FIX = \angle XPQ + \angle XQP = 180^\circ - \angle EXF$.

Suy ra tứ giác $IEXF$ nội tiếp.

Gọi Y, Z lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AB. PY cắt ACtại S. ZP cắt AB tại T. AB giao ZQ tại R.

Áp dụng định lý Pascal cho
$$\begin{pmatrix} A & P & B \\ Y & C & X \end{pmatrix}$$
Suy ra S, I, E thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho
$$\begin{pmatrix} P & B & C \\ A & Z & Y \end{pmatrix}$$
Suy ra S, I, T thẳng hàng.

Vậy S, I, E, T thẳng hàng.

Tương tự R, I, F thẳng hàng.

Gọi L là giao điểm khác X của (IEF) với (O).

Ta có $\angle LIK = \angle LXF = \angle LXQ = \angle LQK$ suy ra L thuộc (IQK).

Tương tự L thuộc (PIJ).

Gọi L' là giao của (RIT) và (O) thì L' thuộc (PIJ), suy ra $L' \equiv L$.

Suy ra L là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $RIEBFT$.

Suy ra hình chiếu của L trên RB nằm trên đường thẳng Simson của L ứng với tam giác IEF.

Tương tự suy ra đường thẳng Simson l của L ứng với tam giác ABC và IEF trùng nhau.

Mặt khác, $\angle JIL = \angle JPL = \angle IQL = \angle LKI$. Tương tự $\angle LIK = \angle LJI$ suy ra L là điểm I-dumpty của tam giác IJK.

Gọi M là trung điểm của JK thì IM đẳng giác với IL trong $\angle JIK$. Do đó $IM \perp l$.

Theo bài toán 11, J, K liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. $\square$

Để kết thúc bài viết, xin giới thiệu một số bài toán liên quan để bạn đọc tự luyện.

Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. Một điểm P bất kì thỏa mãn PI là phân giác của $\angle BPC$. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm I-dumpty của tam giác IPQ là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O).

Gợi ý: nếu gọi K là giao của BP và CQ, L là giao BQ và CP thì $PKQL$ là tứ giác ngoại tiếp một đường tròn tâm I. Chú ý rằng tiếp điểm T của đường tròn A-mixtilinear với (O) là điểm I-dumpty của tam giác BIC.

Bài 14. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Một đường thẳng bất kì vuông góc với AI cắt AB, AC lần lượt tại E, F. (BIE) cắt (CIF) tại P khác I. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm I-dumpty của tam giác IPQ là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O).

Gợi ý: Điểm P của bài 14 thỏa mãn điều kiện của bài 13. Quan sát lại cấu hình của bài 6 ta còn có thể mở rộng bài toán này như sau.

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. P, Q là một cặp liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. (BIP) cắt AB tại E khác B, (CIP) cắt AC tại F khác C. Qua A kẻ đường song song với EF cắt lại (O) tại T. Chứng minh rằng IT là đường đối trung của tam giác PIQ.

Phép chứng minh bài 15 bạn đọc có thể tham khảo tại [1] bởi bạn **Đặng Trung**.

Bài 16. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. P là hình chiếu của I trên trung trực BC. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. AQ cắt (O) tại T. Chứng minh rằng IT là đường đối trung của tam giác PIQ.

Gợi ý: Điểm P của bài 16 vẫn thỏa mãn điều kiện của bài 13. Do đó cần chứng minh T là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear với (O).

Bài 17. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). D là tiếp điểm của (I) với BC. K đối xứng với D qua trung điểm của BC. P, Q lần lượt là điểm I-dumpty của các tam giác AID, AIK. Chứng minh rằng tâm của (IPQ) nằm trên IK.

Gợi ý: Thử dựng ba tâm bàng tiếp để đổi mô hình, sử dụng phép nghịch đảo tâm I.

Bài 18. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với trực tâm H, I là tâm đường tròn nội tiếp. Z là điểm anti-Steiner của HI. OI cắt (O) tại X, Y. Qua Z kẻ đường vuông góc với ZI cắt tiếp tuyến tại X, Y của (O) lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Gợi ý: Áp dụng bài 5 và bài 12.

Tài liệu

[1] https://www.facebook.com/photo/?fbid=7860499680630151

Email: ***Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com***