Bài toán số 5 trong kì thi Việt Nam TST 2024

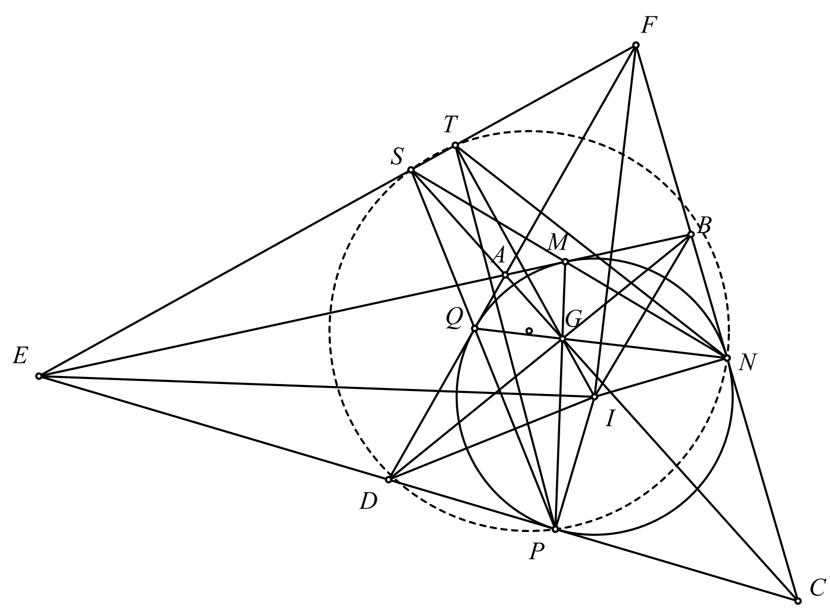
Nguyễn Văn Linh

Năm 2024

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Tia EF cắt (O) tại M. Tiếp tuyến tại A và M của (O) cắt nhau tại S. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T. IT cắt OA tại J. Chứng minh rằng $\angle ASJ = \angle TSI$.

Lời giải. Ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. AC giao EF tại S. Khi đó đường tròn pedal của I ứng với tam giác EFC đi qua S.

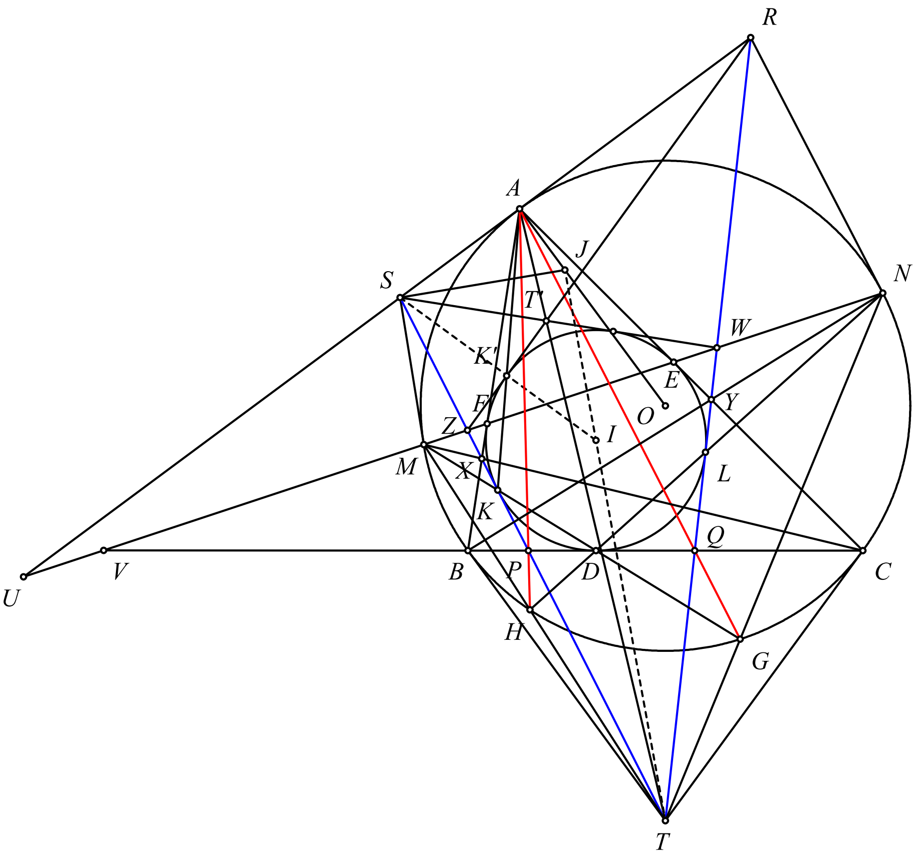


Chứng minh. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Kẻ $IT \perp EF$. Ta cần chứng minh T, S, N, P đồng viên.

Thật vậy, xét $\angle NTP = \angle NFI + \angle IEP = \angle EIF - \angle C = 180^\circ - \angle PGN - \angle PCN = \angle PIN - \angle PGN = \angle PSN$.

Vậy S, T, N, P đồng viên. $\square$

Trở lại bài toán.



Gọi N là giao của tia FE với (O). Tiếp tuyến tại A và N cắt nhau tại R. MD, ND cắt (O) tại G, H, cắt (I) tại K, L. AH, AG cắt BC lần lượt tại P, Q. MN cắt BC tại V.

Ta có AD, BE, CF đồng quy nên $N(VD, BC) = -1$.

Suy ra $(MH, BC) = -1$. Do đó MH đi qua T. Tương tự NG đi qua T.

Đồng thời $A(MH, BC) = -1$ suy ra $A(MH, FE) = -1$. Ta thu được AH là đường đối cực của M. Từ đó KP tiếp xúc với (I).

Tiếp tuyến tại K của (I) cắt AB tại X, tại L của (I) cắt AC tại Y.

Các điểm M, X, C đều nằm trên đường đối cực của giao điểm của FK và ED đối với (I) nên M, X, C thẳng hàng.

Tương tự N, Y, B thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho bộ

$\begin{pmatrix} B & H & C \\ M & B & A \end{pmatrix}$ ta thu được X, P, T thẳng hàng.

AM giao BC tại A' thì S, X, T đều nằm trên đường đối cực của A' đối với (O). Vậy ST tiếp xúc với (I) tại K.

Tương tự RT tiếp xúc với (I) tại L.

RS cắt MN tại U. Ta có (O) tiếp xúc với ba cạnh của tam giác tạo bởi SM, RM, SR nên $(UA, SR) = -1$.

AK cắt lại (I) tại K' thì $Z(K'K, AE) = -1 = (RS, AU)$ nên Z, K', R thẳng hàng.

ZR cắt WS tại T' thì tương tự ta thu được tứ giác $ZT'WT$ ngoại tiếp (I). Mà $(UA, SR) = -1$ nên A, T, T' thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề ta thu được đường tròn pedal của I ứng với tam giác TSR đi qua A. Do đó liên hợp đẳng giác của I trong tam giác TSR nằm trên AO, hay I, J liên hợp đẳng giác trong tam giác TSR. Bài toán được chứng minh.

$\square$

Nhận xét. Cấu hình của bài toán dựa trên mô hình bài G6 IMO Shortlist 2019.