Bài toán số 3 trong kì thi Việt Nam TST 2024

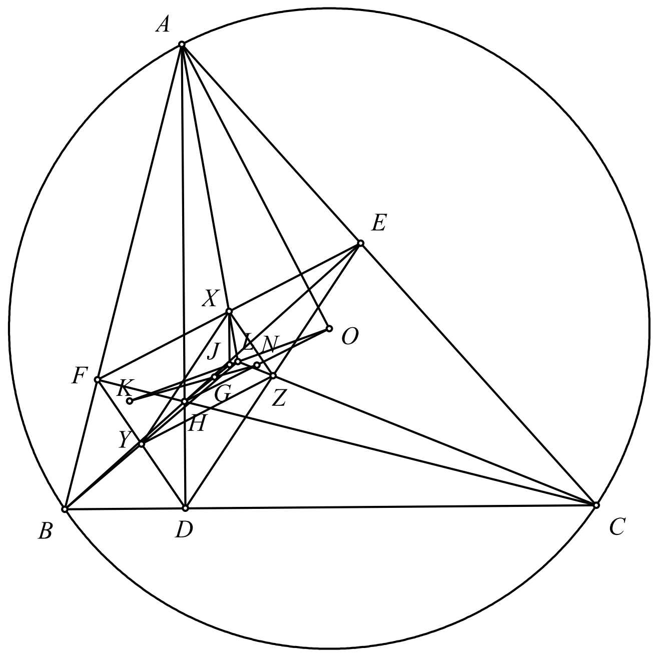
Nguyễn Văn Linh

Năm 2024

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi X, Y, Z lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi A' đối xứng với X qua EF, B' đối xứng với Y qua DF, C' đối xứng với Z qua DE. Chứng minh rằng $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Lời giải. Ta phát biểu một số bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường cao AD, BE, CF. L là điểm Lemoine của tam giác ABC. K là trực tâm của tam giác DEF. Khi đó O, L, K thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, DF, DE. N là tâm Euler của tam giác ABC, J là tâm nội tiếp của tam giác XYZ, G là trọng tâm của tam giác DEF.

Ta có N là tâm ngoại tiếp tam giác DEF nên K, G, N thẳng hàng và $\dfrac{\overline{GK}}{\overline{GN}} = -2$.

Do đó G là trọng tâm của tam giác KHO.

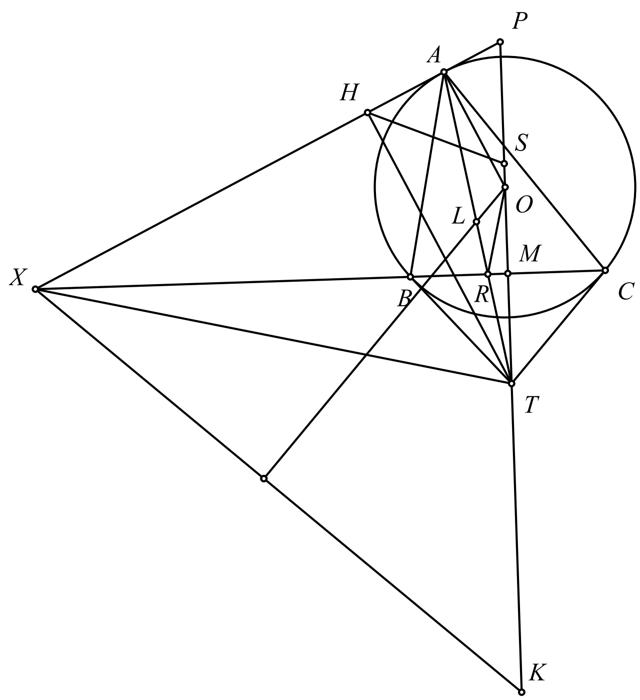
Mà phép vị tự tâm G tỉ số -2 biến tam giác XYZ thành tam giác DEF nên biến J thành H. Từ đó J là trung điểm của KO.

Chú ý rằng $XJ \parallel DA$ nên $XJ \perp BC$. Tương tự suy ra các đường thẳng lần lượt qua X, Y, Z vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại J.

Mà các đường thẳng lần lượt qua A, B, C vuông góc với YZ, XZ, XY đồng quy tại O và AX, BY, CZ đồng quy tại L nên theo định lý Sondat, L, J, O thẳng hàng.

Vậy K, L, O thẳng hàng. $\square$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại T. H là hình chiếu của T trên tiếp tuyến tại A của (O). S đối xứng với T qua BC. L là điểm Lemoine của tam giác ABC. Khi đó $\angle HST = \angle AOL$.



Chứng minh. (Trương Tuấn Nghĩa, HS K53 THPT chuyên Khoa học tự nhiên)

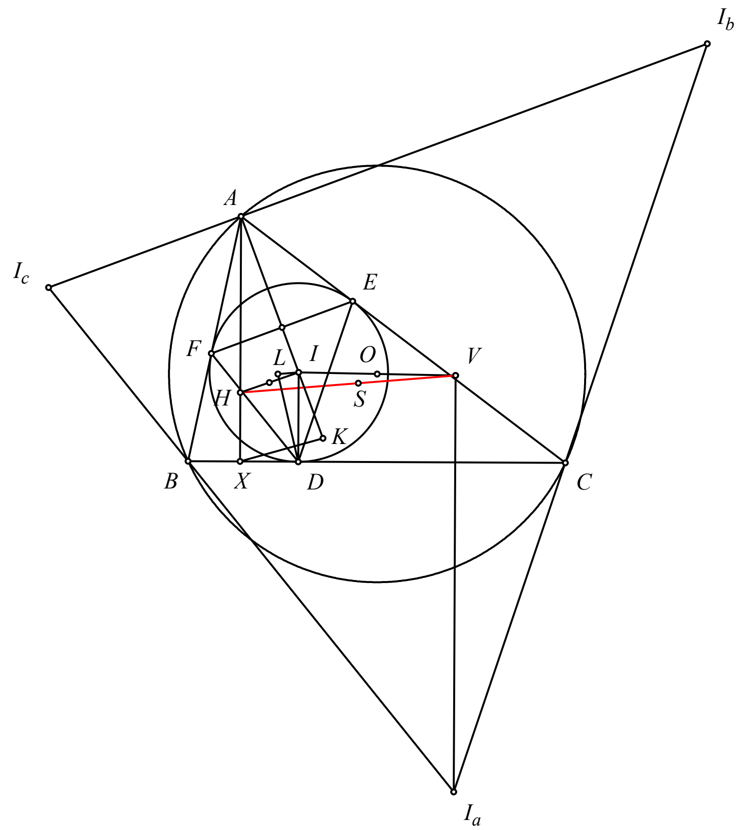
AH cắt BC tại X. Đường thẳng qua X vuông góc với OL cắt OT tại K. KO cắt AH tại P. AT cắt BC tại R.

Ta có $O(AR, LT) = -1$ mà $XP \perp OA$, $XT \perp OR$, $XK \perp OL$, $XM \perp OT$ nên $(PT, KM) = -1$.

Lại có M là trung điểm của ST nên áp dụng hệ thức tương tự như Maclaurin, Newton ta thu được $\overline{PS} \cdot \overline{PK} = \overline{PM} \cdot \overline{PT} = \overline{PH} \cdot \overline{PX}$.

Suy ra $XHSK$ nội tiếp. Từ đó $\angle HST = 180^\circ - \angle HXK = \angle AOL$. $\square$

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. H là trực tâm của tam giác ABC. AH cắt BC tại X. K đối xứng với A qua EF. V là điểm đối xứng với I qua O. Khi đó $\angle AHV = \angle AKX$.



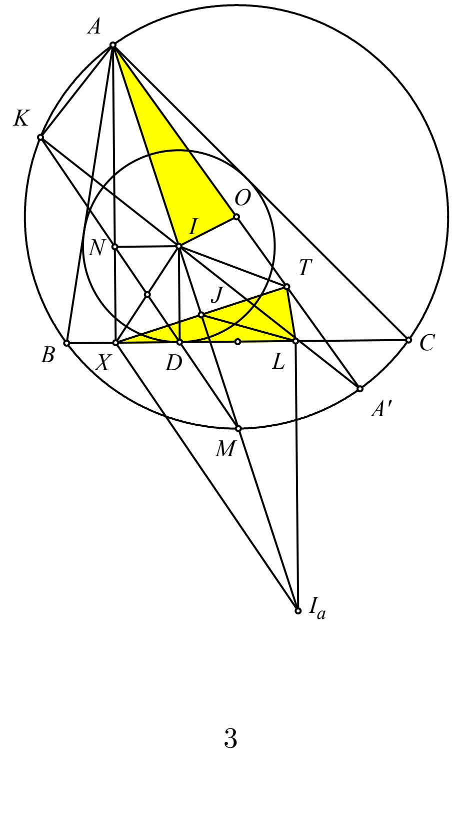
Chứng minh. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC.

Gọi S, L lần lượt là điểm Lemoine của tam giác $I_aI_bI_c$, DEF.

Do V là tâm ngoại tiếp của tam giác $I_aI_bI_c$ nên $\angle SVI_a = \angle LID$.

Theo bổ đề 2, $\angle AKX = \angle LID$. Lại theo bổ đề 1, H, S, V thẳng hàng nên $\angle AKX = \angle SVI_a = \angle AHV$. □

Bổ đề 4. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. $AX \perp BC$. T đối xứng với X qua AI. L là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (I_a) với BC. Khi đó $\triangle XTL \sim \triangle AIO$.



Chứng minh. Kẻ đường kính AA' của (O). $A'I$ cắt (O) tại K. AI giao (O) tại M. KM cắt AX tại N. J là trung điểm của XT.

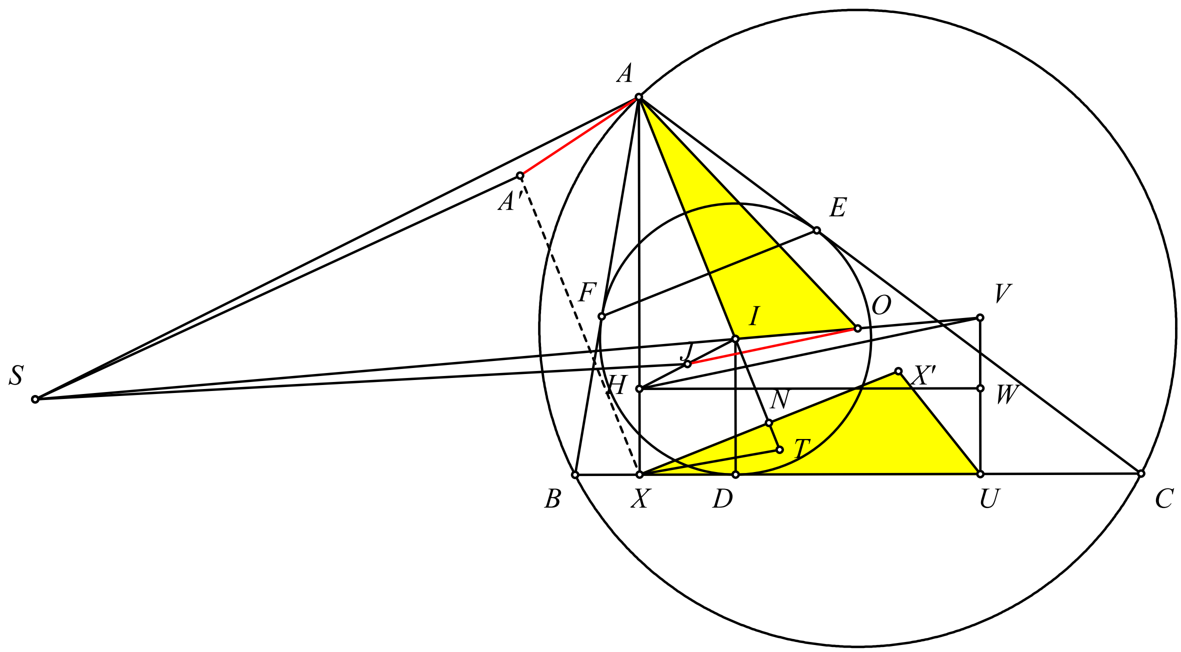
Ta có kết quả quen thuộc K, D, M thẳng hàng và $INXD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $DM \parallel XI_a$, ta thu được $\angle JLX = \angle JI_aX = \angle AMK = \angle AA'I$.

Lại có $\angle JXL = \angle JID = \angle XAI = \angle IAO$ nên $\triangle XJL \sim \triangle AIA'$.

Mà O, J lần lượt là trung điểm của AA' và XT nên biến đổi tỉ lệ cạnh ta thu được $\triangle XTL \sim \triangle AIO$. $\square$

Trở lại bài toán.



Gọi S là điểm nghịch đảo của I qua (O). J là trung điểm của HI. V là điểm đối xứng với I qua O. Kẻ $VU \perp BC$. X' đối xứng với X qua AI, T đối xứng với A qua EF. N là trung điểm của XX'. Kẻ $HW \perp UV$.

Theo bổ đề 3 ta có $\angle A'AI = \angle XTA = \angle AHV$, suy ra $\angle IAO = \angle HAI = \angle(A'A, HV) = \angle(A'A, JO)$.

Mà $OA^2 = OI \cdot OS$ nên $\angle IAO = \angle ASO$.

Suy ra $\angle(SA, SO) = \angle(A'A, JO)$, từ đó $\angle A'AS = \angle JOS$. (1)

Mặt khác, theo bổ đề 4, $\triangle AIO \sim \triangle XX'U$ nên $\dfrac{SA}{SO} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{XX'}{XU} = \dfrac{2XN}{HW} = \dfrac{2XT}{HV}$ (do $\triangle XNT \sim \triangle HWV$) $= \dfrac{A'A}{JO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle SA'A \sim \triangle SJO$.

Tương tự suy ra $\triangle SA'A \sim \triangle SB'B \sim \triangle SC'C \sim \triangle SJO$.

Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng và có hai tâm đường tròn ngoại tiếp tương ứng là O và J. $\square$