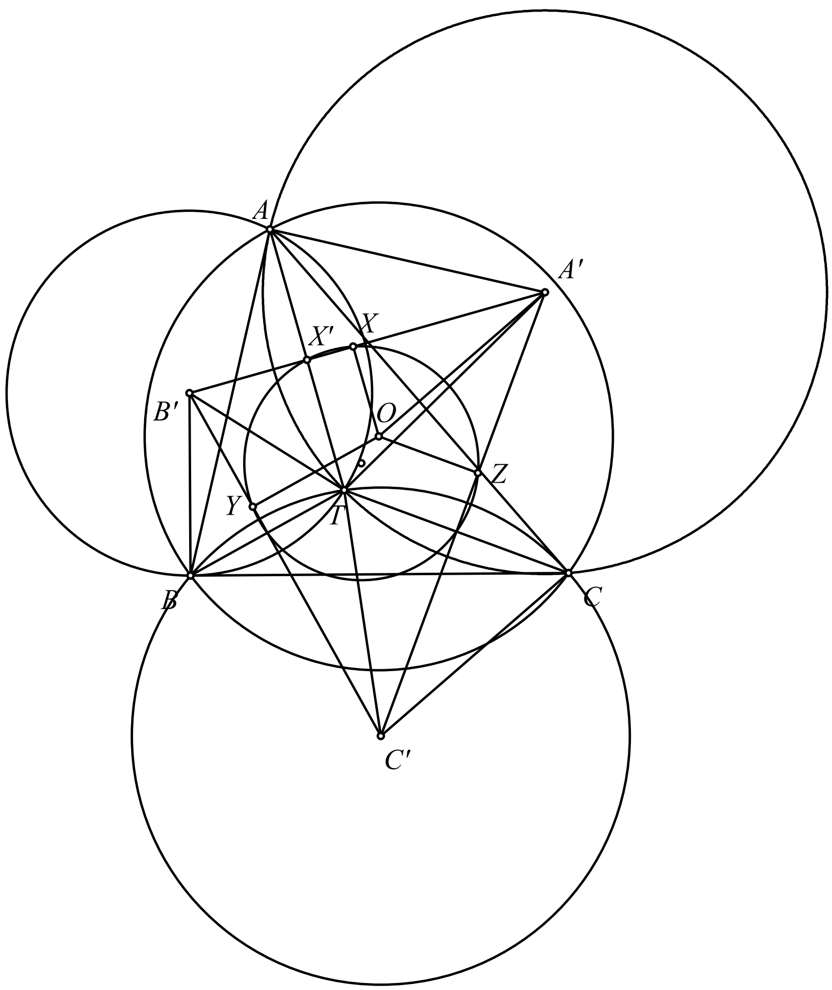
Bài toán số 3 trong kì thi VMO năm 2024

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho ABC là tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi A' là tâm của đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A, B' là tâm của đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B, C' là tâm của đường tròn đi qua B và tiếp xúc với CA tại C.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC.

b) Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$. (XYZ) cắt lại $A'B', B'C', C'A'$ tại X', Y', Z'. Chứng minh rằng AX', BY', CZ' đồng quy.



Lời giải. a) Gọi T là giao điểm của ba đường tròn $(A'; A'A), (B'; B'B), (C'; C'C)$.

Ta có $(AB, AT) \equiv (CA, CT) \equiv (BC, BT) \pmod{\pi}$.

Suy ra $(A'A, A'T) \equiv (C'C, C'T) \equiv (B'B, B'T) \pmod{\pi}$.

Từ đó $\triangle A'AT \overset{+}{\sim} \triangle C'CT \overset{+}{\sim} \triangle B'BT$.

Suy ra tồn tại phép vị tự quay tâm T biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{TA'}{TA} \geq 1$.

Điều này tương đương $\angle AA'T \leq 60^\circ$ hay $\angle TCA \leq 30^\circ$.

Đặt $\angle TAB = \angle TCA = \angle TBC = \alpha$.

Áp dụng định lý cos và công thức tính diện tích cho tam giác TBC ta có

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{BT^2 + a^2 - TC^2}{4S_{BTC}}.$$

Tương tự suy ra

$$\cot\alpha = \frac{BT^2 + a^2 - TC^2}{4S_{BTC}} = \frac{CT^2 + b^2 - TA^2}{4S_{ATC}} = \frac{AT^2 + c^2 - TB^2}{4S_{ATB}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} \geq \sqrt{3}.$$

Suy ra $\alpha \leq 30^\circ$. Bài toán được chứng minh.

b) Ta có $\angle TA'B' = \frac{1}{2}\angle TA'A = \angle TCA$

Mặt khác, $OA' \perp AC$, $A'C' \perp CT$ nên $\angle OA'C' = \angle TCA$.

Vậy $\angle TA'B' = \angle OA'C'$ hay $A'T$ và $A'O$ đẳng giác trong $\angle B'A'C'$.

Tương tự suy ra O và T liên hợp đẳng giác trong tam giác $A'B'C'$.

Suy ra X', Y', Z' là hình chiếu của T trên ba cạnh tam giác $A'B'C'$ hay AX', BY', CZ' đồng quy tại T.

□