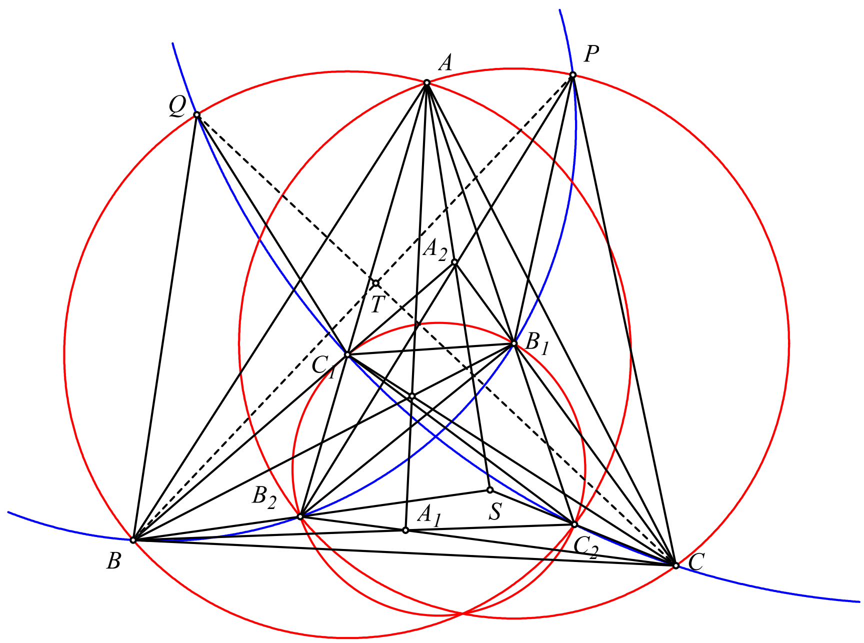
# Bài toán số 6 trong kì thi IMO năm 2023

Nguyễn Văn Linh

**Bài toán.** Cho tam giác đều $ABC$. Các điểm $A_1, B_1, C_1$ nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ và $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$. Cho $BC_1$ và $CB_1$ cắt nhau tại $A_2$, $CA_1$ và $C_1A$ cắt nhau tại $B_2$, $AB_1$ và $BA_1$ cắt nhau tại $C_2$. Chứng minh rằng nếu $A_1B_1C_1$ là tam giác không cân thì các đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ và $CC_1C_2$ sẽ đi qua hai điểm chung.




**Lời giải.** Ta có $\angle AC_2B = \angle ACB + \angle B_1AC + \angle A_1BC = 60° + 90° - \frac{1}{2}\angle AB_1C + 90° - \frac{1}{2}\angle BA_1C = \frac{1}{2}\angle AC_1B$, suy ra $C_1$ là tâm của $(AA_2B)$. Tương tự $B_1$ là tâm của $(AB_2C)$.

Từ đó $\angle B_1B_2C_1 = \angle B_1AB_2 = \angle B_1C_2C_1$, suy ra tứ giác $C_1B_1C_2B_2$ nội tiếp.

Tương tự các điểm $C_1, C_2, A_1, A_2$ và $A_1, A_2, B_1, B_2$ cùng thuộc đường tròn.

Giả sử cả sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Khi đó $\angle BA_1C = 180° - \angle BC_1C_2$, $\angle BA_2C = 180° - \angle C_1B_2B_1 = 180° - \angle C_1AC_2 = 180° - \frac{1}{2}\angle B_2C_1C_2 = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BA_1C) = 90° + \frac{1}{2}\angle BA_1C$.

Mà $\angle BA_2C = \frac{1}{2}\angle BA_1C$ nên điều này vô lý.

Do đó các đường tròn tròn đi qua các bộ điểm $C_1, C_2, B_1, B_2$ ; $C_1, C_2, A_1, A_2$ và $A_1, A_2, B_1, B_2$ là phân biệt, xét trục đẳng phương của các đường tròn này ta thu được $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ đồng quy tại $X$. Hiển nhiên $\mathcal{P}_{X/(AA_1A_2)} = \mathcal{P}_{X/(BB_1B_2)} = \mathcal{P}_{X/(CC_1C_2)} = k < 0$.

Mặt khác, áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác $ABC$ và $A_1B_1C_1$ ta có $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ đồng quy tại tâm của tam giác ABC nên giao điểm của các cặp đường thẳng $B_1C_1$ và $BC$, $A_1C_1$ và $AC$, $A_1B_1$ và $AB$ thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác $AC_1B_1$ và $A_1CB$ ta có $AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy nên giao điểm của các cặp đường thẳng $AC_1$ và $A_1C$, $AB_1$ và $A_1B$, $C_1B_1$ và $BC$ là các điểm thẳng hàng hay $B_1C_1$, $B_2C_2$, $BC$ đồng quy. Tương tự với các bộ ba đường thẳng $A_1C_1$, $A_2C_2$, $AC$ và $A_1B_1$, $A_2B_2$, $AB$.

Từ đó lại áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác $ABC$ và $A_2B_2C_2$ ta thu được $AA_2, BB_2, CC_2$ đồng quy tại $S$.

Gọi $P$ là giao điểm thứ hai của $(B_1; B_1A)$ với $(BB_1B_2)$, $Q$ là giao điểm thứ hai của $(C_1; C_1A)$ với $(CC_1C_2)$.

Ta có $B_1B_2 = B_1T$ nên $BB_1$ là phân giác của $\angle PBB_2$. Tương tự $CC_1$ là phân giác của $\angle QCC_2$.

Suy ra $BP$ cắt $CQ$ tại $T$ là điểm liên hợp đẳng giác của $S$ trong tam giác $ABC$.

Xét $\angle BQC = \angle BQC_2 + \angle C_2QC = \angle BAC_2 + \angle C_2C_1C$.

Tương tự $\angle BPC = \angle CAB_2 + \angle B_2B_1B$.

Ta sẽ chứng minh $\angle BQC = \angle BPC$, điều này tương đương $\angle BAC_2 + \angle C_2C_1C = \angle CAB_2 + \angle B_2B_1B$.

Khi và chỉ khi $\angle BAC_2 + \angle C_2C_1C + \angle B_2C_1C_2 = \angle CAB_2 + \angle B_2B_1B + \angle B_2B_1C_2$.

Khi và chỉ khi $\angle BAC_1 + \angle B_2C_1C = \angle B_1AC + \angle BB_1C_2$.

Điều này hiển nhiên đúng do cả hai vế đều bằng $90°$.

Từ đó ta thu được $P, Q, B, C$ đồng viên. Tương tự ta thu được $\mathcal{P}_{T/(AA_1A_2)} = \mathcal{P}_{T/(BB_1B_2)} = \mathcal{P}_{T/(CC_1C_2)}$.

Vậy $TX$ là trục đẳng phương của các đường tròn $(AA_1A_2)$, $(BB_1B_2)$, $(CC_1C_2)$. Mà $X$ nằm trong cả ba đường tròn nên $(AA_1A_2)$, $(BB_1B_2)$, $(CC_1C_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt. $\square$