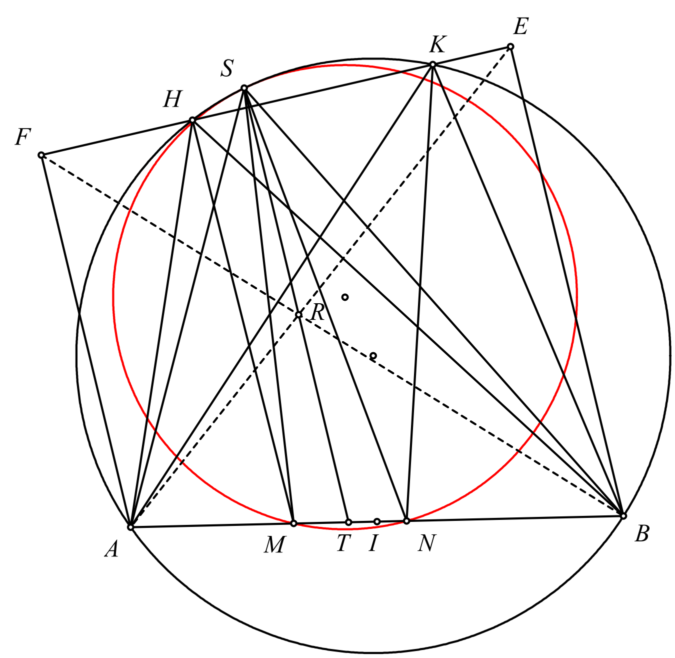
Lời giải cho bài toán hình học số 5 - Việt Nam TST năm 2023

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\angle B < \angle A < 90°$. Gọi I là trung điểm của AB và S là giao điểm của AD, BC. Xét R là một điểm thay đổi nằm trong tam giác SAB sao cho $\angle ASR = \angle BSR$. Trên các đường thẳng AR, BR, lần lượt lấy các điểm E, F sao cho BE, AF cùng song song với RS. Giả sử EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB tại các điểm H, K. Trên đoạn AB lấy điểm M, N sao cho $\angle AHM = \angle BHI$, $\angle BKN = \angle AKI$.

a) Chứng minh rằng tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN thuộc một đường thẳng cố định.

b) Trên BE, AF lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho CP song song với SE và DQ song song với SF. Các đường thẳng SE, SF cắt lại đường tròn (O) theo thứ tự tại U, V. Gọi G là giao điểm của AU và BV. Chứng minh rằng trung tuyến ứng với đỉnh G của tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.



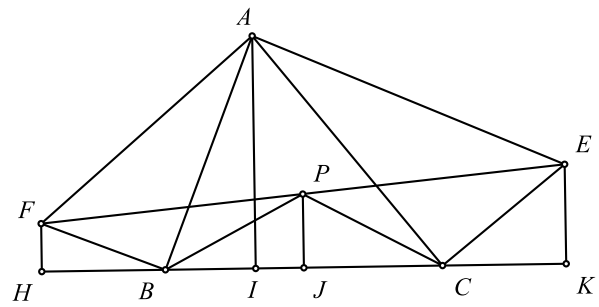
Lời giải. a) Gọi J là giao của EF với BC. SR cắt BC tại T. Ta có AE, BF, ST đồng quy nên $(JT, AB) = -1$, suy ra J là chân phân giác ngoài của $\angle ASB$.

Theo bổ đề cát tuyến ta có $\dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{JA^2}{JB^2} = \left(\dfrac{AH \cdot AK}{BH \cdot BK}\right)^2 = \dfrac{AH^2}{BH^2} \cdot \dfrac{AK^2}{BK^2} = \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{AN}{NB}$.

Suy ra SM, SN đẳng giác trong $\angle ASB$. Từ đó (SMN) tiếp xúc với (SAB). Suy ra tâm của (SMN) luôn nằm trên đường thẳng nối S với tâm của (SAB) cố định.

b) Ta phát biểu một bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài hai tam giác ABF và ACE vuông tại B, C và đồng dạng. Gọi P là trung điểm EF. Khi đó $\angle PBC = \angle PCB = \angle FAB = \angle EAC$.



Chứng minh. Kẻ FH, EK, AI, PJ vuông góc với BC.

Ta có $\triangle FHB \sim \triangle BIA$, $\triangle AIC \sim \triangle CKE$.

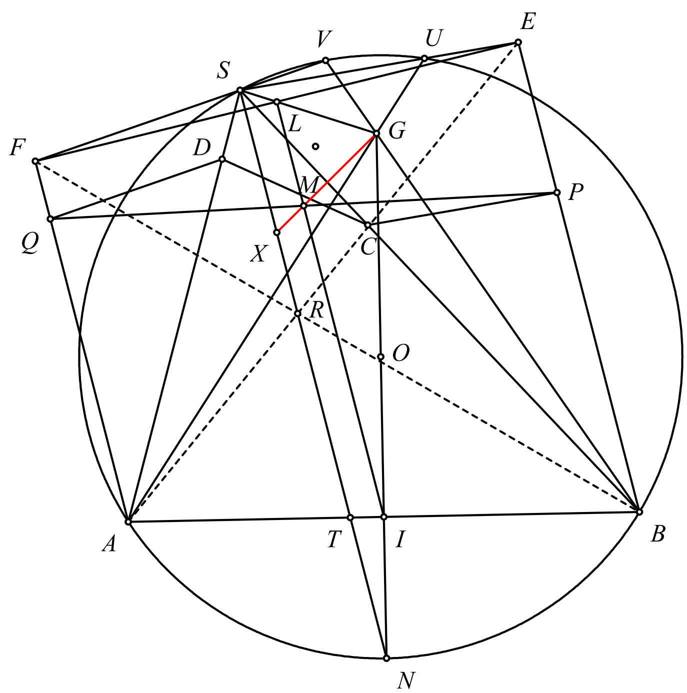
Suy ra $\dfrac{FH}{BI} = \dfrac{HB}{AI} = \dfrac{FB}{AB} = k = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{EK}{CI} = \dfrac{KC}{AI}$.

Ta thu được $FH + EK = k(BI + CI) = kBC$ và $HB = kAI = CK$.

Suy ra J là trung điểm của HK và $PJ = \dfrac{k}{2}BC$.

Suy ra $\dfrac{PJ}{JB} = k = \dfrac{FB}{BA}$. Ta thu được $\triangle BJP \sim \triangle ABF$. Từ đó suy ra đpcm. $\square$

Trở lại bài toán.



Ta có $\dfrac{AF}{BE} = \dfrac{FR}{RB} = \dfrac{TA}{TB} = \dfrac{SA}{SB}$ nên $\triangle FSA \sim \triangle ESB$.

Suy ra $\angle GBA = \angle FSA = \angle ESB = \angle GAB$.

Lấy Y, Z lần lượt trên SF, SE sao cho $\angle YAS = \angle ZBS = 90°$. Khi đó $\triangle SYA \sim \triangle SZB$. Theo bổ đề 1 ta thu được G là trung điểm của YZ. Mà $\dfrac{SF}{SY} = \dfrac{SE}{SZ}$ nên $EF \parallel YZ$. Suy ra SG đi qua trung điểm L của EF.

Gọi M là trung điểm của PQ, ST cắt (SAB) tại N. GM cắt AT tại X.

Đặt $\dfrac{SD}{SA} = m$, $\dfrac{SC}{SB} = n$, $\dfrac{SB}{SA} = t$.

Ta có $LM = \dfrac{1}{2}(FQ + EP) = \dfrac{1}{2}(FA \cdot m + EB \cdot n) = \dfrac{1}{2}(m + tn)FA$.

Lại có $LI = \dfrac{1}{2}(FA + EB) = \dfrac{1}{2}(t + 1)FA$.

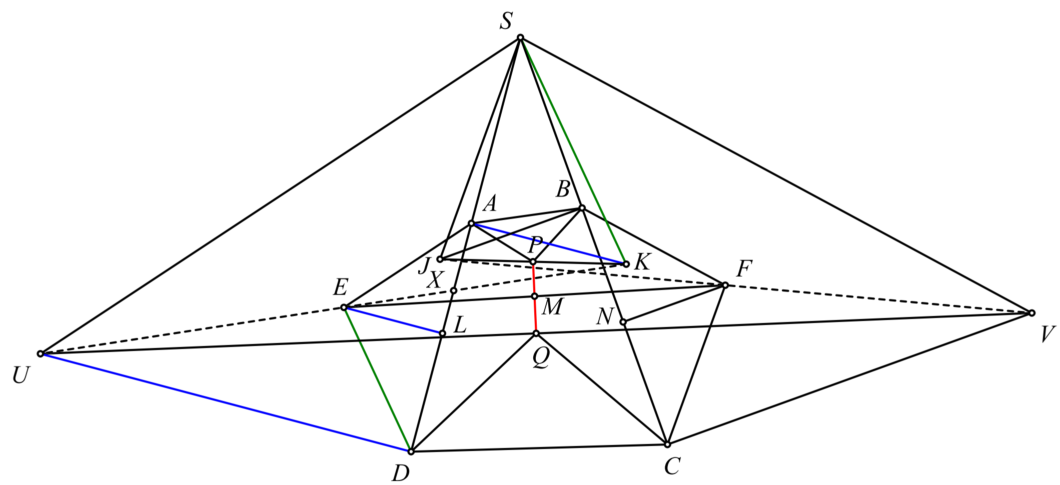
Suy ra $\dfrac{SX}{SN} = \dfrac{LM}{LI} = \dfrac{m + tn}{t + 1} = const$. Mà S, N không đổi nên X cố định. Bài toán được chứng minh.

□

Bài toán mở rộng. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Hai điểm P, Q chuyển động trên hai đường thẳng cố định qua D, C sao cho hai tam giác APD và BQC đồng dạng ngược hướng. PA, QB cắt (O) lần lượt tại E, F. CE cắt DF tại S. M, N là hai điểm cố định trên AD, BC. X, Y nằm trên DP, CQ sao cho $MX \parallel AP$, $NY \parallel BQ$. Chứng minh rằng trung tuyến ứng với đỉnh S của tam giác SXY cắt trung trực MN tại một điểm cố định.

Lời giải. Ta phát biểu và chứng minh một bổ đề sau.

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng các điểm E, F lần lượt nằm trên nửa mặt phẳng bờ AD không chứa B, C và bờ BC không chứa A, D; P, Q lần lượt nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, D và bờ CD chứa AB sao cho $\angle PAB = \angle PBA = \angle EDA = \angle FCB$, $\angle QDC = \angle QCD = \angle EAD = \angle FBC$. Khi đó PQ đi qua trung điểm của EF.



Chứng minh. AB giao CD tại S. Dựng hai điểm U, V sao cho $SU \parallel AE$, $SV \parallel BF$, $\angle SDU = \angle SCV = 90°$. Hai điểm K, J thỏa mãn $SK \parallel DE$, $SJ \parallel CF$, $\angle SAK = \angle SBJ = 90°$.

Khi đó $\angle USD = \angle EAD = \angle FBC = \angle VSC$, suy ra $\triangle SUD \sim \triangle SVC$.

Áp dụng bổ đề 1, ta thu được Q là trung điểm của UV.

Tương tự, P là trung điểm của JK.

Kẻ $EL \perp SD$, $FN \perp BC$. UE cắt AD tại X.

Chú ý $\triangle SAK \sim \triangle DLE$, ta có $\dfrac{XA}{XL} = \dfrac{XA}{XE} \cdot \dfrac{XE}{XL} = \dfrac{XS}{XU} \cdot \dfrac{XU}{XD} = \dfrac{XS}{XD} = \dfrac{DE}{SK} = \dfrac{EL}{AK}$.

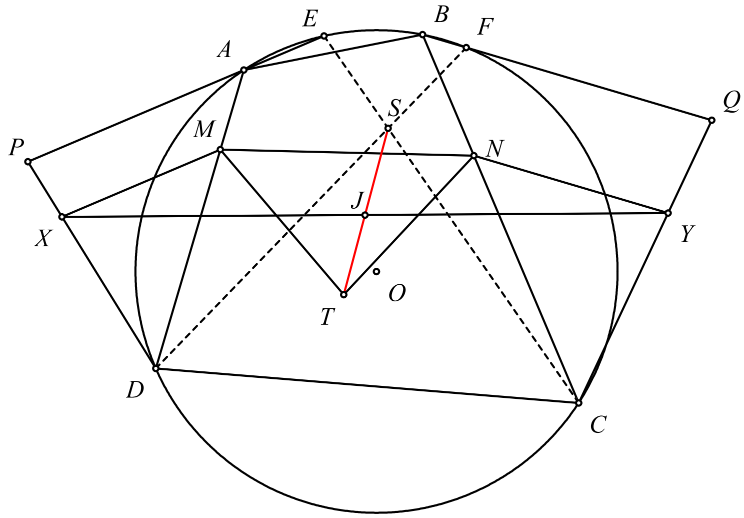
Suy ra E, X, K thẳng hàng và $\dfrac{EK}{EU} = \dfrac{LA}{LD}$.

Tương tự, J, F, V thẳng hàng và $\dfrac{JF}{FV} = \dfrac{NB}{NC}$.

Do hai tam giác AED và BFC đồng dạng nên $\dfrac{LA}{LD} = \dfrac{NB}{NC}$.

Từ đó $\dfrac{EK}{EU} = \dfrac{JF}{FV}$. Theo định lý ERIQ, P, M, Q thẳng hàng. □

Trở lại bài toán.



Ta có $\angle SCD = \angle PAD = \angle XMD$, $\angle SDC = \angle QBC = \angle YNC$. Mà $\angle PAD = \angle QBC$ nên $\angle SDC = \angle SCD = \angle XMD = \angle YNC$.

Dựng điểm T nằm trên nửa mặt phẳng bờ MN chứa C, D sao cho $\angle TMN = \angle TNM = \angle XDM = \angle YCN = const$. Khi đó T là điểm cố định.

Áp dụng bổ đề 2 cho tứ giác $DMNC$ ta thu được ST đi qua trung điểm của XY. Vậy đường trung tuyến ứng với đỉnh S của tam giác SXY luôn đi qua T cố định. □