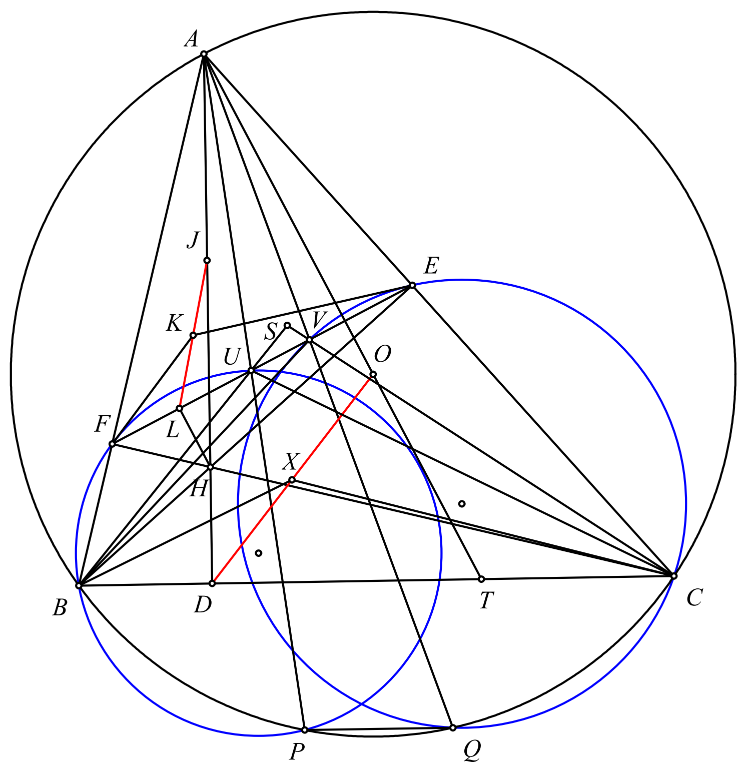
Hai lời giải cho bài toán hình học số 3 - Việt Nam TST năm 2023

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường cao BE, CF giao nhau tại H. Hai điểm P, Q nằm trên (O) sao cho $PQ \parallel BC$. Tiếp tuyến tại F của (BFP) cắt tiếp tuyến tại E của (CEQ) tại K. Kẻ HL vuông góc với EF ($L \in EF$). J là trung điểm của AH. Chứng minh rằng J, L, K thẳng hàng.

Lời giải. Cách 1.



Gọi U, V lần lượt là giao điểm của AP, AQ với EF.

Ta có $\angle BPU = \angle BCA = \angle AFU$, suy ra $BFUP$ nội tiếp. Tương tự, $CEVQ$ nội tiếp.

Gọi S là giao của BU và CV. X là điểm liên hợp đẳng giác với S trong tam giác ABC.

Ta có $\angle XBC = \angle SBA = \angle UBF = \angle KFE$.

Tương tự $\angle XCB = \angle KEF$. Suy ra $\triangle KFE \sim \triangle XBC$.

Lại có $\triangle JFE \sim \triangle BOC$ và $\dfrac{LF}{LE} = \dfrac{DB}{DC}$ nên các điểm K, L trong tam giác EJF tương ứng với các điểm X, D trong tam giác BOC. Vì vậy chỉ cần chứng minh D, X, O thẳng hàng.

Điều này tương đương $\dfrac{S_{XBO}}{S_{XCO}} = \dfrac{DB}{DC}$.

Ta có $\dfrac{S_{XBO}}{S_{XCO}} = \dfrac{XB}{XC} \cdot \dfrac{\sin\angle XBO}{\sin\angle XCO} = \dfrac{\sin\angle XCB}{\sin\angle XBC} \cdot \dfrac{\sin\angle UBE}{\sin\angle VCF} = \dfrac{\sin\angle VCE}{\sin\angle VCF} \cdot \dfrac{\sin\angle UBE}{\sin\angle UBF}$.

Chú ý rằng $\dfrac{\sin\angle VCE}{VE} = \dfrac{\sin VEC}{VC} = \dfrac{\sin B}{VC}$, $\dfrac{\sin\angle VCF}{VF} = \dfrac{\sin VFC}{VC} = \dfrac{\cos C}{VC}$.

Suy ra $\dfrac{\sin\angle VCE}{\sin\angle VCF} = \dfrac{VE}{VF}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos C}$.

Tương tự ta thu được $\dfrac{S_{XBO}}{S_{XCO}} = \dfrac{VE}{VF}\cdot\dfrac{UE}{UF}\cdot\dfrac{\sin 2B}{\sin 2C} = \dfrac{AE^2}{AF^2}\cdot\dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}}$.

Gọi Tlà giao điểm của AO với BC thì $\dfrac{S_{XBO}}{S_{XCO}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}\cdot\dfrac{TC}{TB} = \dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{TC}{TB} = \dfrac{DB}{DC}$.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2.

Ta chứng minh một bổ đề sau.

Bổ đề. Cho một ánh xạ f bảo toàn tỉ số kép đi từ chùm đầy đủ tâm P vào chùm đầy đủ tâm Q. Nếu $f(PQ) = QP$ thì với l bất kì thuộc chùm đầy đủ tâm P sao cho $l \neq PQ$, $l \cap f(l)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Chứng minh. Cố định l_1, l_2 thuộc chùm đầy đủ tâm P ($l_1, l_2 \neq PQ$). Gọi X, X_1, X_2 lần lượt là giao của l với $f(l)$, l_1 với $f(l_1)$, l_2 với $f(l_2)$.

Ta có f bảo toàn tỉ số kép nên $(PQ, PX; PX_1, PX_2) = (QP, QX; QX_1, QX_2)$ hay $P(QX, X_1X_2) = Q(PX, X_1X_2)$. Suy ra X, X_1, X_2 thẳng hàng.

Vậy X chuyển động trên đường thẳng X_1X_2 cố định.

□

Trở lại bài toán. Trước tiên ta chứng minh một kết quả tổng quát hơn như sau:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). E, F nằm trên AC, AB sao cho EF đối song với BC trong góc A. Hai điểm P, Q chuyển động trên (O) sao cho $PQ \parallel BC$. Tiếp tuyến tại E của (CEQ) cắt tiếp tuyến tại F của (BFP) tại K. Chứng minh rằng K chuyển động trên một đường thẳng cố định.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh tồn tại một ánh xạ f bảo toàn tỉ số kép đi từ chùm đầy đủ tâm F vào chùm đầy đủ tâm E.

Gọi M, N lần lượt là giao của AP, AQ với EF. Hiển nhiên M, N nằm trên (BFP), (CEQ).

Ta xây dựng một ánh xạ f như sau:

Ta có $\angle(FE, FK) = \angle(BF, BM)$ nên tồn tại một phép đồng dạng f_1 biến FE thành BA, biến FK thành BM.

Gọi f_2 là phép chiếu từ chùm đầy đủ tâm B lên đường thẳng EF. Khi đó $f_2(BM) = M$.

f_3 là một ánh xạ đi từ EF vào chùm đầy đủ tâm A, biến M thành AM.

f_4 là phép đối xứng trục phân giác $\angle BAC$, biến AM thành AN.

f_5 là phép chiếu từ chùm đầy đủ tâm A lên EF, biến AN thành N.

f_6 biến N thành CN.

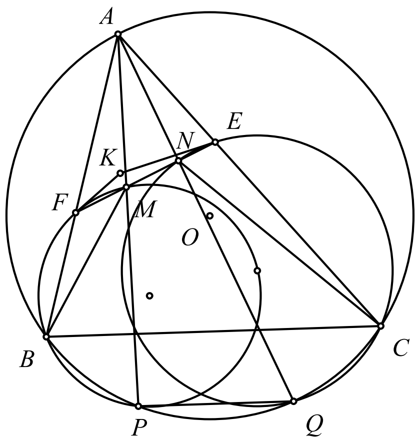
f_7 biến CN thành EK.

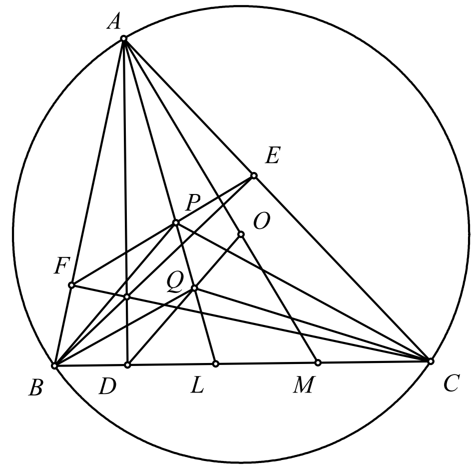
Như vậy f là hợp của các phép $f_1, f_2, ..., f_7$ và là một ánh xạ bảo toàn tỉ số kép.

Cho $P \equiv B$, $Q \equiv C$ thì dễ thấy EK, FK trùng EF.

Vì vậy $f(EF) = FE$. Theo bổ đề, ta thu được K chuyển động trên một đường thẳng cố định.

□





Bây giờ quay lại bài toán ban đầu. Để chứng minh đường thẳng cố định là LJ, ta chỉ cần chỉ ra hai vị trí thỏa mãn K nằm trên LJ.

Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $P \equiv Q$, do có hai vị trí thỏa mãn là hai điểm chính giữa cung BC.

Tương tự cách 1, ta chỉ cần chứng minh kết quả sau đây:

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có đường cao AD, BE, CF. Phân giác $\angle BAC$ cắt EF tại P. Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. Khi đó D, Q, O thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi M, L lần lượt là giao điểm của AO, AQ với BC. OQ cắt BC tại D'.

Ta có F, P, E thẳng hàng nên $B(FP, EC) = C(FP, EB)$.

Sử dụng các phép đối xứng trục phân giác góc B, góc C ta thu được $B(LQ, OA) = C(OQ, LA)$

Khi và chỉ khi $O(LQ, BA) = O(CQ, LA)$.

Khi và chỉ khi $(LD', BM) = (CD', LM)$

Tương đương $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\overline{LC}}{\overline{BL}} = \dfrac{\overline{LD'}}{\overline{ML}} \cdot \dfrac{\overline{MC}}{\overline{BD'}}$.

Mà $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{BD}} = \dfrac{AM \cdot AC}{AD \cdot AB} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{DL}} \cdot \dfrac{AC}{AB}$ nên $D \equiv D'$.

Bài toán được chứng minh. □

□