Lời giải bài hình học ngày 2 kỳ thi chọn HSG Quốc gia năm học 2022-2023

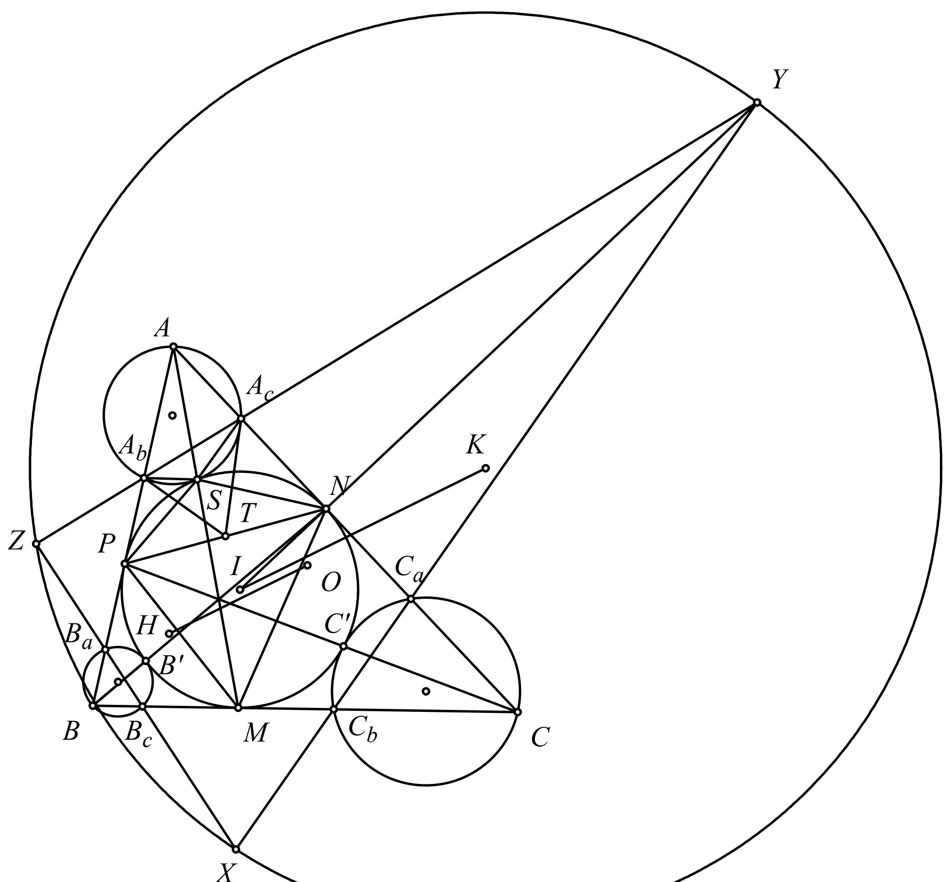
Nguyễn Văn Linh

GV trường THPT chuyên KHTN, ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội

Bài toán. Cho tam giác nhọn, không cân ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại M, N, P. Gọi Ω_A là một đường tròn đi qua A và tiếp xúc ngoài với (I) tại một điểm A' và cắt lại AB, AC tương ứng tại A_b, A_c. Các đường tròn Ω_B, Ω_C và các điểm $B', B_a, B_c, C', C_a, C_b$ được xác định một cách tương tự.

a) Chứng minh rằng $B_cC_b + C_aA_c + A_bB_a \geq NP + PM + MN$.

b) Xét trường hợp A', B', C' tương ứng thuộc các đường thẳng AM, BN, CP. Gọi K' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh tương ứng thuộc ba đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Chứng minh rằng OH song song với IK.



Lời giải. a) Gọi T là trung điểm của PN.

Ta có (I) là đường tròn A-mixtilinear bàng tiếp của tam giác AA_cA_b nên theo bổ đề Sawayama, T là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AA_cA_b.

Ta thu được $\angle PA_bT = \angle TA_bA_c$ và $\angle A_bTA_c = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle A_bPT$.

Suy ra $\triangle PA_bT \sim \triangle TA_bA_c$.

Tương tự $\triangle NA_cT \sim \triangle TA_cA_b$.

Suy ra $\triangle PA_bT \sim \triangle NTA_c$.

Từ đó ta nhận được $PA_b \cdot NA_c = PT \cdot NT = \dfrac{1}{4}PN^2$.

Suy ra $PA_b + NA_c \geq 2\sqrt{PA_b \cdot NA_c} = PN$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PA_b = NA_c$, khi và chỉ khi Ω_A tiếp xúc với (I) tại điểm chính giữa cung PN.

Tương tự ta nhận được $B_cC_a + C_aA_c + A_bB_a = PA_b + NA_c + PB_a + MB_c + MC_b + NC_a \geq NP + PM + MN$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi Ω_A, Ω_B, Ω_C lần lượt tiếp xúc với (I) tại các điểm chính giữa cung PN, PM, MN.

b)

Gọi a, b, c lần lượt là độ dài của BC, CA, AB; p là nửa chu vi của tam giác ABC.

Gọi S là tiếp điểm của Ω_A với (I).

Ta có $\angle AA_cA_b = \angle A_bSA = 180^\circ - \angle A_bSP - \angle PSM = 180^\circ - \angle A_bAS - \angle PMS - \angle PSM = 180^\circ - 2\angle BPM = \angle ABC$.

Tương tự $\angle CC_aC_b = \angle ABC$.

Suy ra tam giác YA_cC_a cân tại Y.

Mặt khác, cũng từ biến đổi góc ở trên ta thu được tứ giác $SMBA_b$, $SMCA_c$ nội tiếp.

Từ đó $\overline{AA_c} \cdot \overline{AC} = \overline{AS} \cdot \overline{AM} = AN^2$.

Suy ra $AA_c = \dfrac{AN^2}{AC} = \dfrac{(p-a)^2}{b}$.

Suy ra $NA_c = AN - AA_c = (p-a) - \dfrac{(p-a)^2}{b} = \dfrac{b(p-a)-(p-a)^2}{b} = \dfrac{(p-a)(p-c)}{b}$.

Tương tự, $C_aN = \dfrac{(p-a)(p-c)}{b}$. Suy ra $NA_c = NC_a$.

Ta nhận được Y, N, I thẳng hàng. Suy ra YI là phân giác của $\angle XYZ$.

Tương tự suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ.

Gọi I_X, I_Y, I_Z lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc X, Y, Z của tam giác XYZ.

Khi đó I là trực tâm của tam giác $I_XI_YI_Z$, K là tâm đường tròn Euler của tam giác $I_XI_YI_Z$ nên IK là đường thẳng Euler của tam giác $I_XI_YI_Z$. Mà hai tam giác $I_XI_YI_Z$ và ABC có cạnh tương ứng song song nên đường thẳng Euler của hai tam giác $I_XI_YI_Z$ và ABC cũng song song với nhau, hay $OH \parallel IK$.

$\square$