

Lời giải bài hình học ngày 1 kỳ thi chọn HSG Quốc gia năm học 2022-2023

Nguyễn Văn Linh

GV trường THPT chuyên KHTN, DH KHTN, ĐHQG Hà Nội

Bài toán. Cho tứ giác $ABCD$ có $DB = DC$ và nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC và J, E, F tương ứng là tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB . Đường thẳng MN cắt JE, JF lần lượt tại K, H ; IJ cắt lại đường tròn (IBC) tại G và DG cắt lại (IBC) tại T .

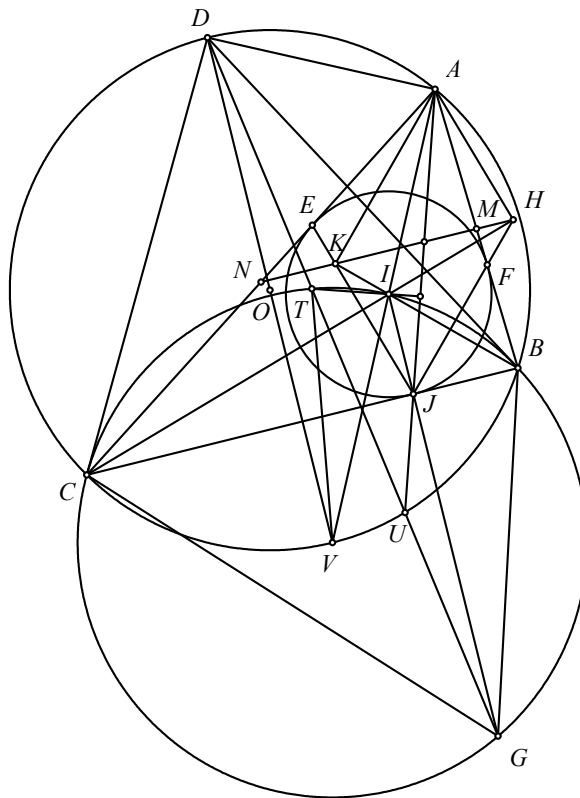
a) Chứng minh rằng JA đi qua trung điểm của HK và vuông góc với IT .

b) Gọi R, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Lấy các điểm P, Q lần lượt trên IF, IE sao cho KP và HQ đều vuông góc với MN . Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ, RS đồng quy.

Lời giải. a) Ta phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc sau.

Bổ đề. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . (I) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F . BI cắt EF tại P . Khi đó $\angle BPC = 90^\circ$ và P nằm trên đường trung bình ứng với cạnh AB của tam giác ABC .

Trở lại bài toán.



Theo bổ đề trên, ta có $\angle AHI = 90^\circ$. Suy ra $AH \parallel JE$.

Tương tự, $AK \parallel JF$. Suy ra $AKJH$ là hình bình hành. Từ đó AJ đi qua trung điểm của KH .

AJ cắt (O) tại U khác A . GU cắt (O) tại D' . V là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) .

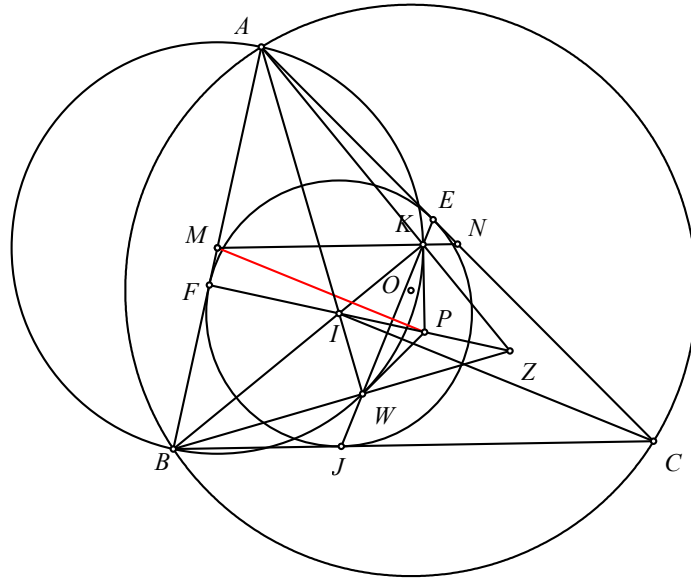
Ta có $\overline{JU} \cdot \overline{JA} = \overline{JB} \cdot \overline{JC} = \overline{JI} \cdot \overline{JG}$ nên tứ giác $AIUG$ nội tiếp.

Từ đó $\angle D'GI = \angle IAU = \angle VD'U$. Suy ra $VD' \parallel IG$.

Suy ra $VD' \perp BC$. Ta thu được $D'B = D'C$ hay $D' \equiv D$.

Xét $\angle IAU = \angle TGI = \frac{1}{2} \angle TVI = 90^\circ - \angle TIV$ nên $TI \perp AJ$.

b)



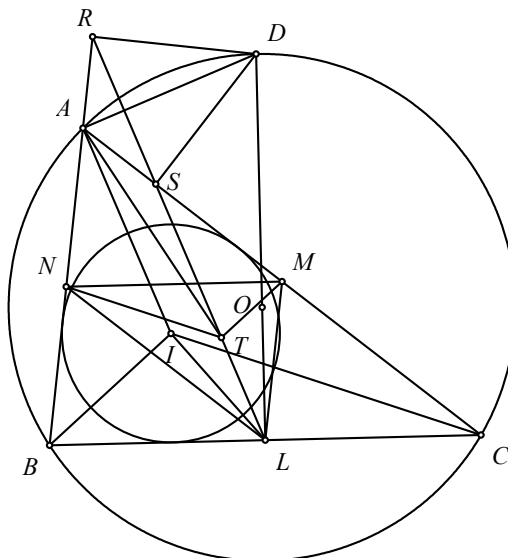
Trước tiên ta chứng minh $PM \parallel IC$.

Thật vậy, gọi W là giao của AI với JE . Theo bổ đề ta có $\angle AWB = 90^\circ$.

AK cắt BW tại Z thì I là trực tâm của tam giác AZB .

Gọi P' là trung điểm của IZ . Ta có $P'K, P'W$ là hai tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB nên $P'K \perp MN$. Suy ra $P' \equiv P$. Đồng thời $MP \perp KW$. Mà $KW \equiv EF \perp IC$ nên $MP \parallel IC$.

Tiếp theo, gọi T là giao điểm của MP và NQ . Ta chứng minh T nằm trên đường thẳng Simson của D ứng với tam giác ABC .



Thật vậy, gọi L là trung điểm của BC . G là trọng tâm của tam giác ABC .

Xét phép vị tự tâm G , tỉ số $\frac{-1}{2}$:

$V_G^{\frac{-1}{2}} : A \mapsto L, B \mapsto M, C \mapsto N$.

Do $IB \parallel MT, IC \parallel NT$ nên $V_G^{\frac{-1}{2}} : I \mapsto T$.

Suy ra $AI \parallel LT$.

Rõ ràng R, S, L nằm trên đường thẳng Simson của D ứng với tam giác ABC .

Đồng thời do AD là phân giác của $\angle RAS$ nên $RS \perp AD$, suy ra $RS \parallel AI$.

Vậy R, S, T thẳng hàng. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét.

Câu hình ở vị trí số 4 của ngày 1. Đề hình này không quá khó, tuy nhiên hình vẽ khá rối. Vì vậy ý b) nên tách ra thành hai bài toán nhỏ để dễ xử lí.