Mở rộng đường tròn mixtilinear

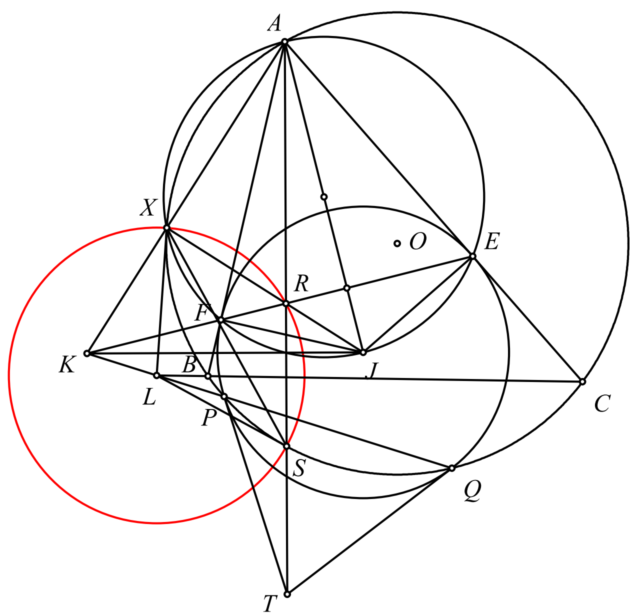
Nguyễn Văn Linh

Năm 2022

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) bất kì tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và cắt (O) tại P, Q. Tiếp tuyến tại P và Q của (J) cắt nhau tại T. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng TK đi qua điểm chính giữa cung BAC của (O).

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) bất kì tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và cắt (O) tại P, Q. Tiếp tuyến tại P và Q của (J) cắt nhau tại T. AT cắt (O) tại S. Đường tròn đường kính AJ cắt (O) tại X. Khi đó tứ giác $XPSQ$ điều hòa.



Chứng minh. Xét trục đẳng phương của các cặp hai trong ba đường tròn (O), (AEF), (J) ta thu được EF, AX, PQ đồng quy tại K.

Gọi XJ giao EF tại R. Hiển nhiên R là trực tâm của tam giác AJK nên $KJ \perp AR$. Mà AT là đường đối cực của K đối với (J) nên R thuộc AT.

Gọi (L) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XRS.

Ta có $\angle XRA + \angle XAR = 90^\circ$ nên (L) trực giao với (O).

Mặt khác, $JR \cdot JX = JE^2$ nên (L) trực giao với (J).

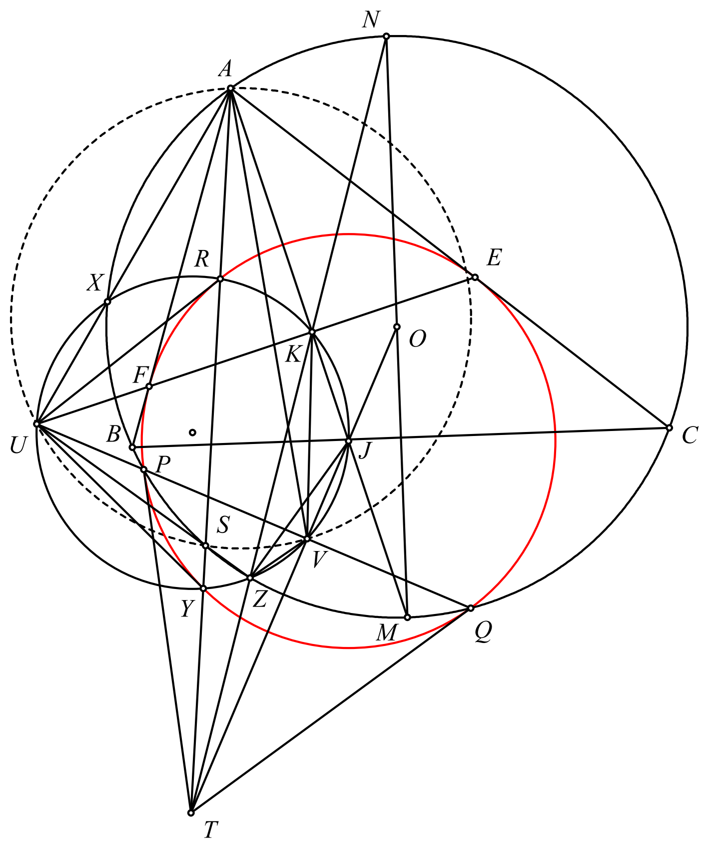
Do đó $\mathcal{P}_{L/(O)} = R^2_{(L)} = \mathcal{P}_{L/(J)}$ hay L nằm trên PQ.

Mà LS, LX là hai tiếp tuyến của (O) nên tứ giác $XPSQ$ điều hòa. $\square$

Nhận xét 1. L nằm trên BC do $\dfrac{RB}{RC} = \dfrac{XB}{XC}$ và XL là tiếp tuyến của (XBC) nên $(L; LX)$ là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng BC.

Từ đây ta cũng thu được tứ giác $XBSC$ điều hòa. Vậy $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{XB}{XC} = \dfrac{FB}{EC}$.

Trở lại bài toán.



Gọi U là giao của PQ và EF, V là trung điểm của PQ. AT cắt (O) tại S. US cắt (O) tại Z. AT cắt (J) tại R, Y.

Do AT là đường đối cực của U đối với (J) nên UR, UY là hai tiếp tuyến của (J).

Ta có $US \cdot UZ = UP \cdot UQ = UF \cdot UE = UR^2 = UY^2$ suy ra $URZY$ nội tiếp đường tròn đường kính UJ.

UA cắt (O) tại X.

Theo bổ đề, tứ giác $XPSQ$ điều hòa.

Gọi f là phép nghịch đảo tâm U, phương tích bằng phương tích của U đối với (O).

Ta có $f(X) = A$, $f(P) = Q$, $f(S) = Z$, suy ra tứ giác $APZQ$ điều hòa.

Suy ra $\angle AVU = \angle ZVU = \dfrac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{UZ}_{(UJ)} = \dfrac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{UR}_{(UJ)} + \dfrac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{YZ}_{(UJ)} = \angle USA$.

Ta thu được tứ giác $USVA$ nội tiếp.

Lại có $JK \cdot JA = JF^2 = JV \cdot JT$ nên tứ giác $AKVT$ nội tiếp.

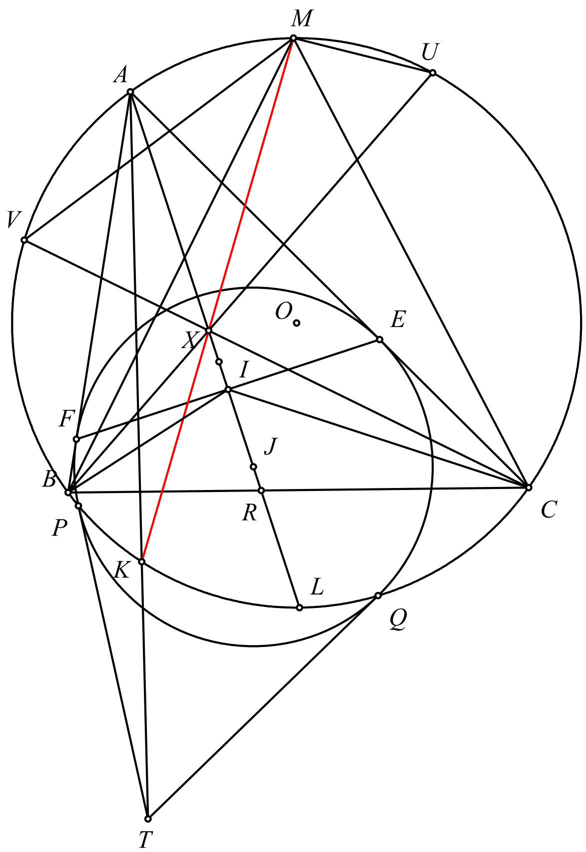
Suy ra $\angle ZKV = \angle ZUV = \angle TAV = \angle TKV$, suy ra T, Z, K thẳng hàng.

TK cắt (O) tại N.

Ta có $\angle SAN = 180^\circ - \angle SZK = \angle KVQ = 90^\circ + \angle KVJ = 90^\circ + \angle TAK$.

Suy ra $\angle KAN = 90^\circ$. Vậy N là điểm chính giữa cung BAC của (O). $\square$

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) bất kì tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và cắt (O) tại P, Q. Tiếp tuyến tại P và Q của (J) cắt nhau tại T. AT cắt (O) tại K. Gọi I là trung điểm của EF. X là liên hợp đẳng giác của I trong tam giác ABC. Chứng minh rằng KX đi qua điểm chính giữa cung BAC của (O).



Lời giải. Gọi L là giao điểm của AJ với (O). M đối xứng với L qua O. Ta cần chứng minh K, X, M thẳng hàng.

Gọi R là giao của AJ với BC. Ta có LB là tiếp tuyến của (RBA) và BX, BI đẳng giác trong $\angle ABR$ nên LB cũng là tiếp tuyến của (BXI). Tương tự LC là tiếp tuyến của (CXI).

Suy ra B, C thuộc một đường tròn Apollonius có tâm L của đoạn thẳng XI.

Suy ra $\dfrac{BI}{BX} = \dfrac{CI}{CX}$.

BX, CX cắt (O) lần lượt tại U, V.

K, X, M thẳng hàng khi và chỉ khi $B(KX, CM) = C(XK, BM)$.

$\Leftrightarrow (UK, CM) = (VK, BM)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{CU}{CK} : \dfrac{MU}{MK} = \dfrac{BV}{BK} : \dfrac{MV}{MK}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{CU}{CK} : MU = \dfrac{BV}{BK} : MV$.

$\Leftrightarrow \dfrac{CK}{BK} = \dfrac{CU}{BV} \cdot \dfrac{MV}{MU}$. (1)

Ta có $\dfrac{CU}{BV} = \dfrac{CX}{BX} = \dfrac{CI}{BI}$.

Mặt khác, xét $(CM, CX) \equiv (CM, CA) + (CA, CX) \equiv (LM, LA) + (CI, CB) \equiv (BC, EF) + (CI, CB) \equiv (CI, EF) \pmod{\pi}$.

Tương tự $(BM, BX) \equiv (IB, IF) \pmod{\pi}$.

Ta thu được $\dfrac{MV}{MU} = \dfrac{\sin\angle MCX}{\sin\angle MBX} = \dfrac{\sin\angle EIC}{\sin\angle FIB}$.

Suy ra $\dfrac{CU}{BV} \cdot \dfrac{MV}{MU} = \dfrac{CI}{BI} \cdot \dfrac{\sin\angle EIC}{\sin\angle FIB} = \dfrac{EC}{FB}$.

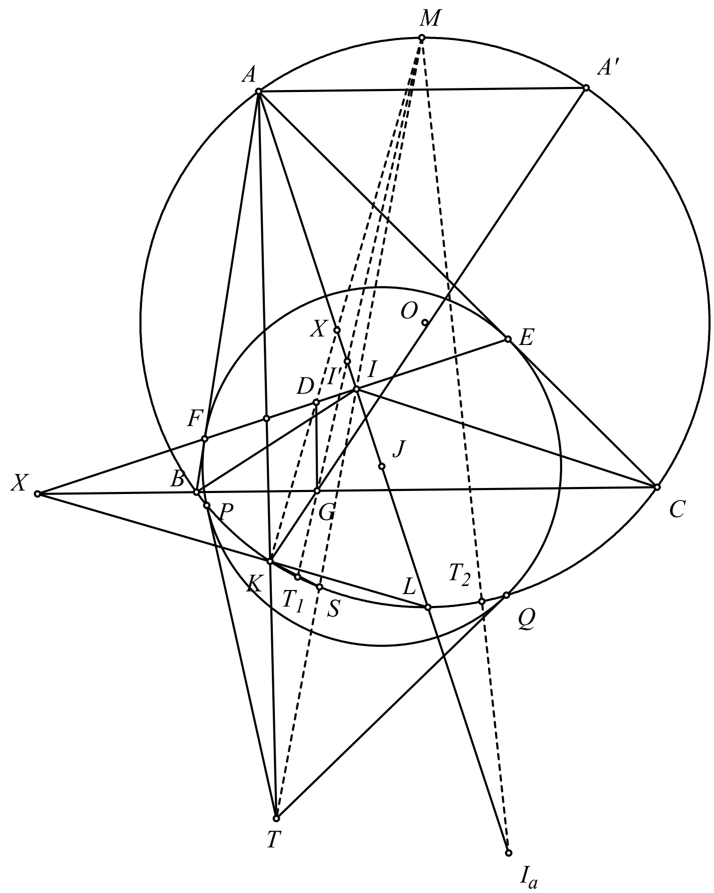
Theo nhận xét 1, ta có $\dfrac{EC}{FB} = \dfrac{KC}{KB}$.

Vậy (1) đúng. Bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2. Một số tính chất:

1) EF, BC, KL đồng quy.

Chứng minh. Từ kết quả $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{FB}{EC}$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với ba điểm X, E, F thẳng hàng ta thu được KX là phân giác ngoài của $\angle BKC$.



2) Khi (J) chuyển động, KS luôn đi qua một điểm cố định.

Chứng minh. Gọi I', I_a lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Đường tròn A-mixtilinear nội tiếp và bàng tiếp góc A tiếp xúc với (O) lần lượt tại T_1, T_2.

Ta có $(XI, I'I_a) = -1$ nên $M(XI, I'I_a) = -1$, suy ra $(KS, T_1T_2) = -1$.

Do đó KS luôn đi qua giao hai tiếp tuyến tại T_1, T_2 của (O).

3) KM cắt EF tại D. Kẻ $DG \perp BC$ ($G \in BC$). Khi đó KG, KA đẳng giác trong $\angle BKC$.

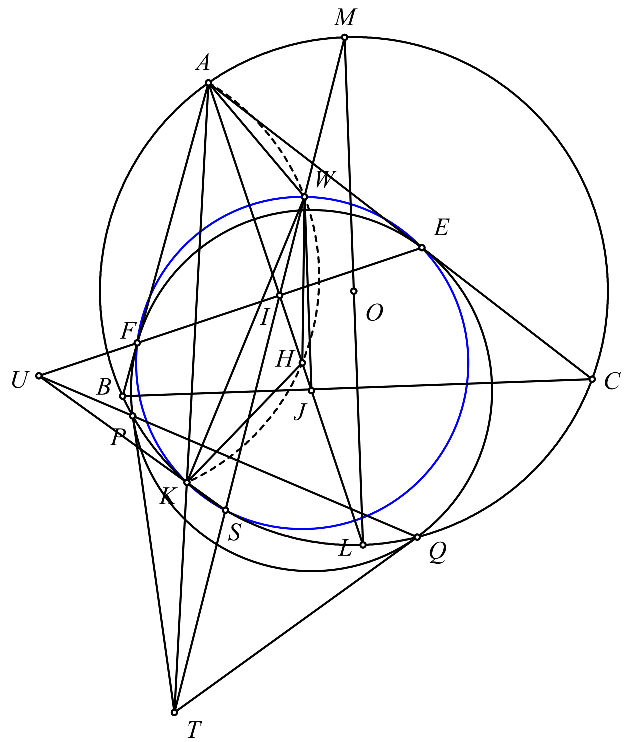
Chứng minh. KG cắt (O) tại A'.

Do $AM \parallel DI$ nên $DILK$ nội tiếp.

Ta có $XDGK$ nội tiếp nên $\angle KGX = \angle KDX = \angle KLI = \angle AA'K$, suy ra $AA' \parallel BC$.

Vậy KG, KA đẳng giác trong $\angle BKC$.

4) Lấy điểm W nằm trên IM sao cho $JW \perp BC$. Khi đó AW, AT đẳng giác trong $\angle BAC$.



Chứng minh.

Do $JW \parallel ML$ nên tứ giác $AWJS$ nội tiếp.

Suy ra $IW \cdot IS = IA \cdot IJ = IE \cdot IF$, suy ra các điểm W, E, F, S, K đều thuộc đường tròn có tâm H.

Ta có $\angle KWH = 90^\circ - \angle KSW = \angle KAH$ nên tứ giác $AWHK$ nội tiếp.

Mà $HW = HK$ nên AH là phân giác của $\angle WAK$. Vậy AW, AT đẳng giác trong $\angle BAC$.