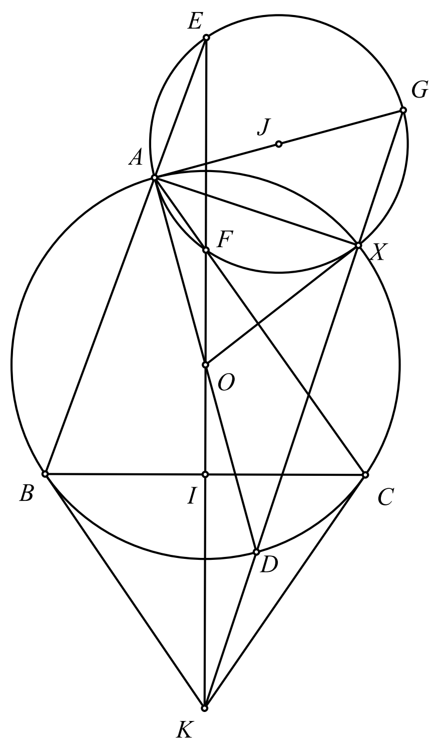
Lời giải bài hình học ngày 2 kỳ thi chọn đội tuyển Quốc tế của Việt Nam năm học 2021-2022

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường thẳng qua O và trung điểm I của BC cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại E, F. Gọi D, G lần lượt là các điểm đối xứng của A qua O và qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Gọi K là điểm đối xứng của O qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

a) Chứng minh rằng các điểm D, G, K thẳng hàng.

b) Trên các đường thẳng KB, KC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $IM \perp AC$ và $IN \perp AB$. Trung trực của IK cắt MN tại H. IH cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng AI là trục đẳng phương của (APQ) và (O).



Lời giải. a) Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. (J) cắt (O) tại X khác A.

Ta có $\angle JAF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AJF = 90^\circ - \angle AEF = \angle ABC$ nên AJ là tiếp tuyến của (O).

Do đó (O) và (J) trực giao. Suy ra OA, OX là hai tiếp tuyến kẻ từ O tới (J). Ta thu được tứ giác $AEXF$ điều hòa.

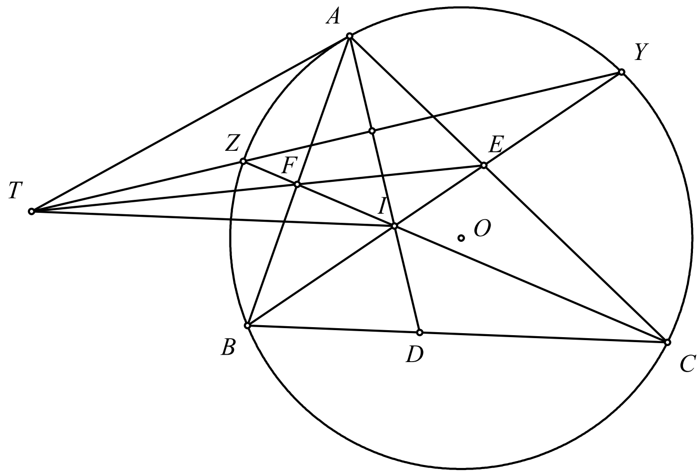
Suy ra $A(AX, EF) = -1$, chiếu lên (O) ta thu được $(DX, BC) = -1$, suy ra DX đi qua K.

Mà $\angle AXD = \angle AXG = 90^\circ$ nên D, X, G thẳng hàng.

Vậy K, D, X, G thẳng hàng.

b) Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF giao nhau tại I. Trung trực của AI cắt EF tại T. Khi đó $TI \parallel BC$.



Chứng minh. BE, CF cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại Y, Z. AI cắt BC tại D.

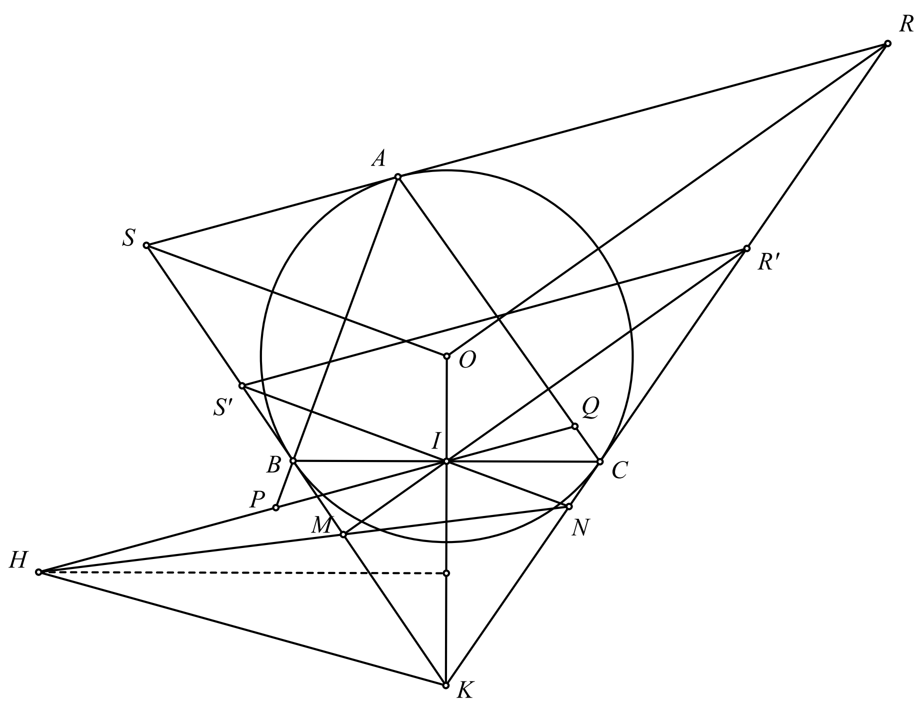
Ta có YZ là trung trực của AI nên T thuộc YZ.

Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} A & Z & B \\ Y & A & C \end{pmatrix}$ ta thu được AT là tiếp tuyến của (O).

Suy ra $\angle IAT = \angle TAI = \angle TAB + \angle BAI = \angle ACB + \angle IAC = \angle ADB$.

Suy ra $TI \parallel BC$. □

Trở lại bài toán.



Gọi R, S lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại A và C của (O), tiếp tuyến tại A và B của (O). MI cắt RK tại R', NI cắt SK tại S'.

Ta có $IS' \parallel OS$, $IR' \parallel OR$ nên tồn tại một phép vị tự tâm K lần lượt biến S', I, R' thành S, O, R. Mà O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KRS nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $KS'R'$.

Áp dụng bổ đề cho tam giác $KR'S'$ ta thu được $HI \parallel S'R' \parallel SR$.

Suy ra $HI \perp AO$, suy ra HI đối song với BC trong $\angle BAC$, hay P, Q, B, C đồng viên.

Suy ra $\overline{IB} \cdot \overline{IC} = \overline{IP} \cdot \overline{IQ}$. Ta thu được I nằm trên trục đẳng phương của (APQ) và (O). Bài toán được chứng minh.

$\square$