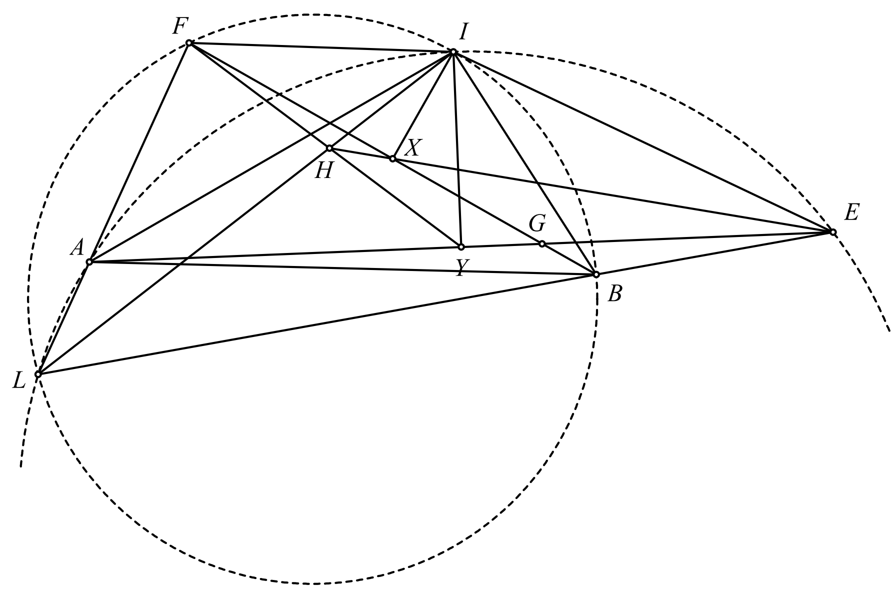
Lời giải bài hình học ngày 1 kỳ thi chọn đội tuyển Quốc tế của Việt Nam năm học 2021-2022

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho hình bình hành $ABCD$ có I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xét điểm G nằm trong tam giác IAB sao cho $\angle IAG = \angle IBG \neq 45^\circ - \dfrac{\angle AIB}{4}$. Ký hiệu E, F tương ứng là hình chiếu của C trên AG và D trên BG. Trung tuyến ứng với đỉnh E của tam giác BEF và trung tuyến ứng với đỉnh F của tam giác AEF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng AF, BC và IH đồng quy. Gọi điểm đồng quy đó là L.

b) Gọi K là giao điểm của các đường thẳng CE và DF. Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LAB và M, N lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác EIJ và FIJ. Chứng minh rằng EM, FN và đường thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác GAB, KCD đồng quy.



Lời giải. a) Gọi L là giao của FA với (FIB). Ta có $IF = IB$ nên LI là phân giác của $\angle ALB$.

Đồng thời $\angle ALI = \angle IBF = \angle IAE = IEA$ suy ra $LAIE$ là tứ giác nội tiếp.

Lại có $IA = IE$ nên LI là phân giác của $\angle ALE$, suy ra L, B, E thẳng hàng.

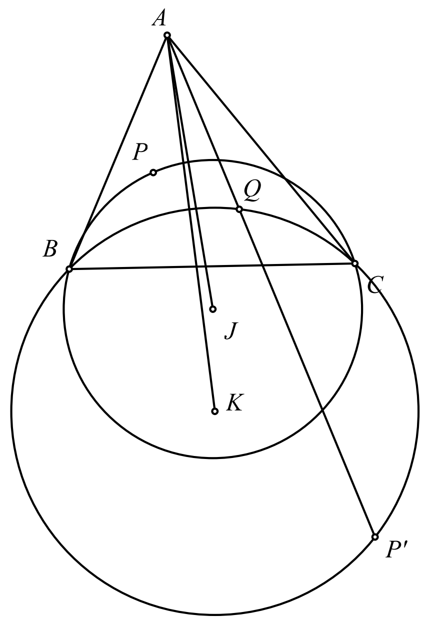
Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của BF, AE. Ta có $\angle FIB = \angle EIA$ nên $\angle XIB = \angle YIA$.

Vậy IX, IY và IA, IB là các cặp đường đẳng giác trong $\angle EIF$. Lại có FX giao EY tại G, FY giao EX tại H nên theo bổ đề đẳng giác, IH, IG đẳng giác trong $\angle EIF$.

Đồng thời FA giao EB tại L, FB giao EA tại G nên cũng theo bổ đề đẳng giác, IL, IG đẳng giác trong $\angle EIF$. Vậy L, H, I thẳng hàng.

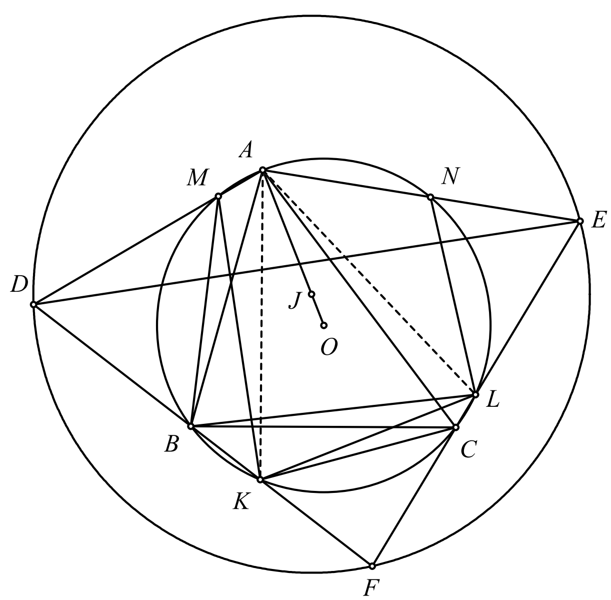
b) Ta phát biểu hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC với hai điểm P, Q liên hợp đẳng giác. Gọi J, K lần lượt là tâm của (BPC), (BQC). Khi đó AJ, AK đẳng giác trong $\angle BAC$.



Chứng minh. Gọi P' là giao điểm khác Q của AQ với (K). Phép nghịch đảo đối xứng tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ biến B thành C, P thành Q' nên (BPC) biến thành $(BQ'C)$. Suy ra AJ, AK đẳng giác trong $\angle BAC$. $\square$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). D, E là các điểm thỏa mãn $AD =$ AB, $AC = AE$ và AD, AE đẳng giác trong $\angle BAC$. DB giao CE tại F. J là tâm của (DEF). Khi đó A, J, O thẳng hàng.



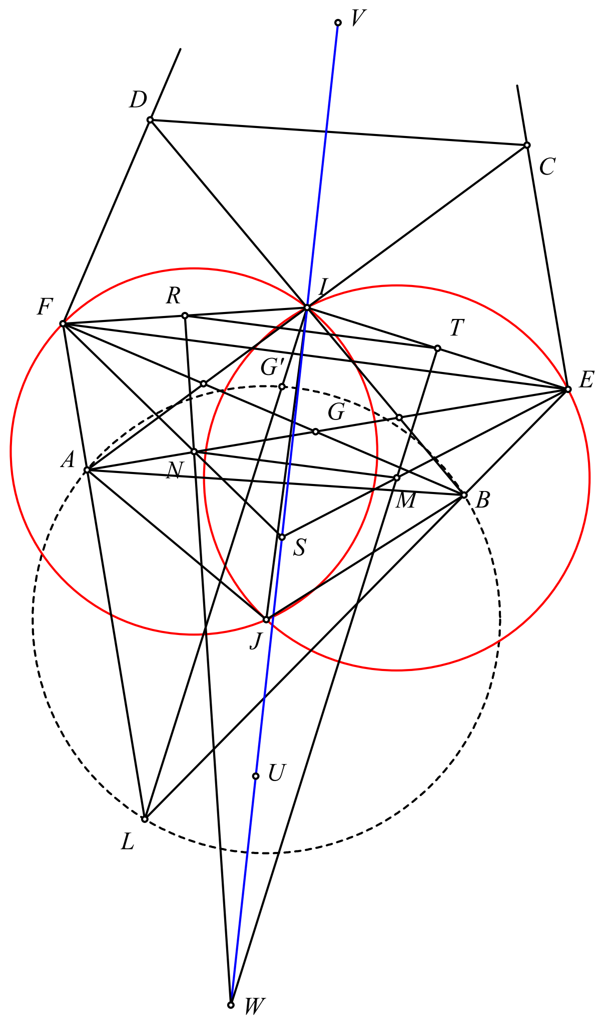
Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề trong trường hợp D, E nằm ngoài $\angle BAC$. Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Gọi M, N, K, L lần lượt là giao của AD, AE, BD, CE với (O).

Ta có $\angle ABD = \angle ACE$ nên $AK = AL$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $JK = JL$. Điều này tương đương $\mathcal{P}_{K/(J)} = \mathcal{P}_{L/(J)}$. (1)

Xét $\angle MBD = 180^\circ - \angle ADB - \angle DMB = \angle ACF - \angle ACB = \angle BCF$, suy ra $MK = BL$.
Tương tự, $NL = CK$.
Suy ra $\dfrac{FK}{FL} = \dfrac{CK}{BL} = \dfrac{NL}{MK}$.
Lại có $\angle DKM = \angle DAB = \angle EAC = \angle NLE$, suy ra $\triangle DKM \sim \triangle ELN$, suy ra $\dfrac{NL}{MK} = \dfrac{LE}{KD}$.
Vậy $\dfrac{FK}{FL} = \dfrac{LE}{KD}$, ta thu được $KF \cdot KD = LF \cdot LE$. Suy ra (1) đúng. $\square$

Trở lại bài toán.



Gọi U, V, W lần lượt là tâm của (AGB), (DKC), (EIF). Trước tiên ta chứng minh U, V, W, I thẳng hàng.

Thật vậy, áp dụng bổ đề 2 cho tam giác EIF với hai điểm D, C ta thu được V, I, S thẳng hàng.

Lại áp dụng bổ đề 2 cho tam giác EIF với hai điểm A, B ta thu được U, I, S thẳng hàng.

Vậy U, V, W, I thẳng hàng.

Gọi G' là điểm liên hợp đẳng giác của G trong tam giác AIB.

Ta có $\angle AG'B = 180^\circ - 2\angle GAI = 180^\circ - \angle ALB$, suy ra G' thuộc (J).

Áp dụng bổ đề 1 cho tam giác AIB với hai điểm G, G' ta thu được AJ, AU đẳng giác trong $\angle AIB$ hay trong $\angle EIF$. Suy ra $IJ \perp EF$, từ đó $MN \parallel EF$.

Gọi R, T lần lượt là trung điểm của IF, IE. Chú ý rằng $RT \parallel MN \parallel EF$ nên áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác FRN và ETM ta thu được FN, EM, IW đồng quy.

Bài toán được chứng minh. $\square$