

Lời giải bài hình học ngày 2 kỳ thi chọn HSG Quốc gia năm học 2021-2022

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho tam giác ABC có B, C cố định trên đường tròn (O) (BC không đi qua tâm O) và điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . L là giao điểm của I_aD với OI và E là điểm trên (I) sao cho DE song song với AI .

a) Đường thẳng LE cắt đường thẳng AI tại F . Chứng minh rằng $AF = AI$.

b) Trên đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác I_aBC lấy điểm M sao cho I_aM song song với AD , MD cắt lại (J) tại N . Chứng minh rằng trung điểm T của MN luôn thuộc một đường tròn cố định.

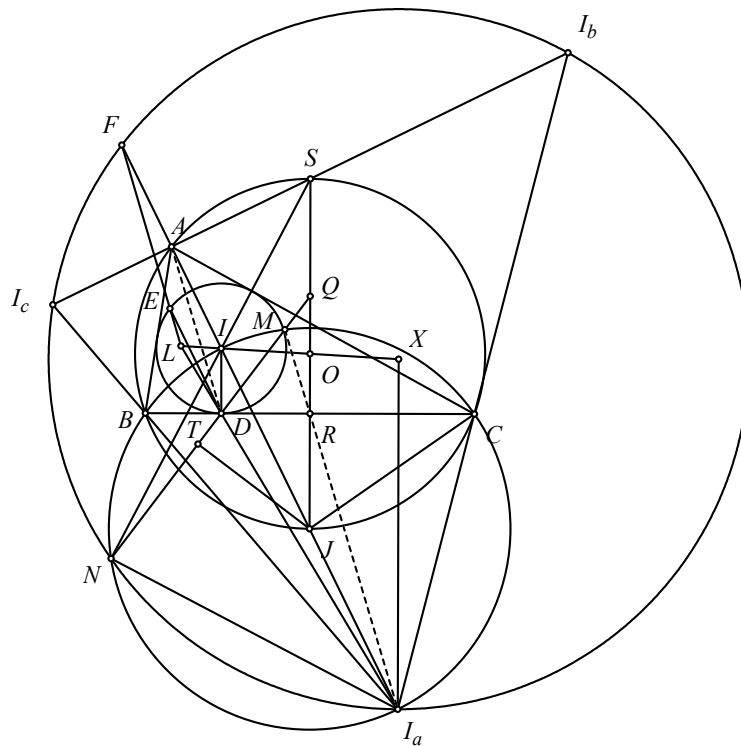
Lời giải. a) Gọi I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC . (X) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$.

Ta có X là điểm đối xứng của I qua O và $TI_a \parallel ID$ (do cùng vuông góc với BC).

Suy ra L là tâm vị tự ngoài của (I) và (X) .

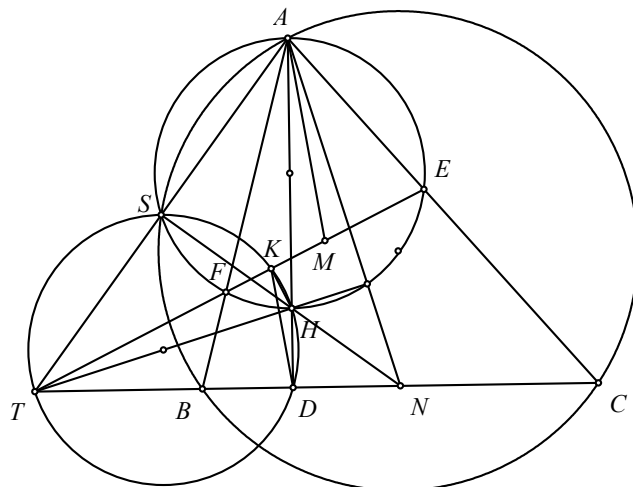
Do $DE \parallel FI_a$ nên phép vị tự tâm L biến (I) thành (X) sẽ biến E thành F . Suy ra F thuộc (X) .

Mà I là trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$ nên F đối xứng với I qua I_bI_c , suy ra $AF = AI$.



b) Ta phát biểu hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC có đường cao AD, BE, CF giao nhau tại H . Kẻ $HK \perp EF$. M là trung điểm của EF . Khi đó $AM \parallel DK$.

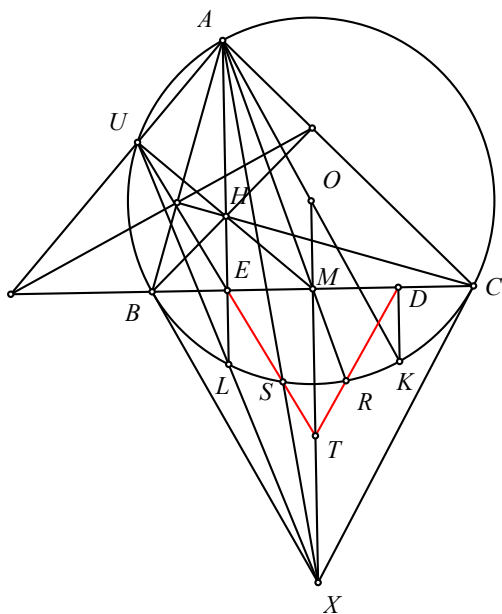


Chứng minh. Đường tròn (AEF) cắt (ABC) tại S khác A . Khi đó AS, EF, BC đồng quy tại T . Gọi N là trung điểm của BC .

Ta có N, H, S thẳng hàng do đó $NH \perp AT$, suy ra H là trực tâm của tam giác ANT . Suy ra $TH \perp AN$.

Các điểm T, S, K, H, D cùng nằm trên đường tròn đường kính TH nên $\angle TKD = \angle THD = \angle ANB = \angle AME$, suy ra $DK \parallel AM$. \square

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại X . M là trung điểm của BC . AM cắt (O) tại R . Kẻ đường kính AK của (O) . Kẻ $KD \perp BC$ ($D \in BC$). Khi đó DR đi qua trung điểm của XM .



Chứng minh. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . AH cắt BC tại E , cắt (O) tại L khác A . AX cắt (O) tại S . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại U khác A .

Hiển nhiên $A(UE, BC) = -1$ nên $(UL, BC) = -1$. Suy ra U, L, X thẳng hàng.

Lại có $U(AE, BC) = -1 = (AS, BC)$ nên U, E, S thẳng hàng.

MÀ U, H, M thẳng hàng và $EL = EH$ nên theo bổ đề hình thang, ES đi qua trung điểm của MX .

Do ES và DR đối xứng nhau qua trung trực của BC nên DR cũng đi qua trung điểm của MX . \square

Trở lại bài toán.

Theo bổ đề 1, I_aM đi qua trung điểm R của BC .

Gọi S là điểm chính giữa cung BAC của (O) . Theo bổ đề 2, DM đi qua trung điểm Q của SR .

Vậy MD luôn đi qua Q cố định, suy ra T thuộc đường tròn đường kính QJ cố định. \square

Nhận xét. Hình vẽ của bài toán tuy rối nhưng nếu biết cách đổi mô hình về dạng trực tâm quen thuộc như phát biểu của bổ đề 1,2 thì bài toán trở nên không quá khó.