

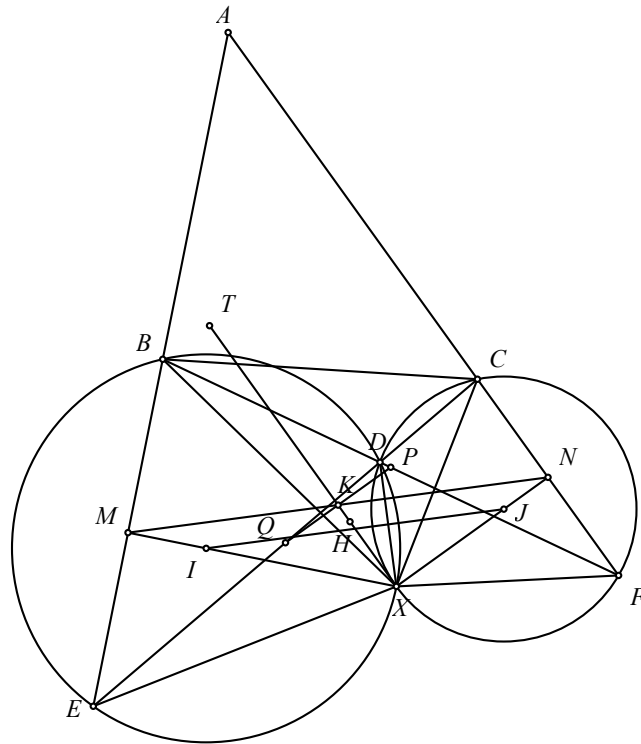
Lời giải bài hình học ngày 1 kỳ thi chọn HSG Quốc gia năm học 2021-2022

Nguyễn Văn Linh

Bài toán. Cho tam giác nhọn ABC . Các điểm E, F lần lượt thay đổi trên tia đối của các tia BA, CA sao cho $BF = CE$ ($E \neq B, F \neq C$). Gọi M, N tương ứng là trung điểm của BE, CF và D là giao điểm của BF với CE .

a) Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBE, DCF . Chứng minh rằng MN song song với IJ .

b) Gọi K là trung điểm của MN và H là trực tâm của tam giác AEF . Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. a) Gọi X là giao điểm khác D của (I) và (J) .

Ta có $\angle XBF = \angle XEC, \angle XFB = \angle XCE$ và $BF = CE$ nên $\triangle BXF = \triangle EXC$ (g.c.g).

Suy ra $XB = XE, XC = XF$. Ta thu được X, I, M thẳng hàng, X, J, N thẳng hàng.

Đồng thời $\angle EBX = \angle EDX = \angle XFC$ nên $\triangle BXE \sim \triangle FXC$.

Xét hai tam giác BXE và FXC ta thấy các điểm M, N là trung điểm của hai cạnh tương ứng BE, CF ; I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác nên $\frac{XI}{IM} = \frac{XJ}{JN}$.

Vậy $MN \parallel IJ$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BF, CE .

Ta có $MQ \parallel BC \parallel NP$ và $MQ = \frac{1}{2}BC = NP$ nên $MQNP$ là hình bình hành.

Suy ra K đồng thời là trung điểm của PQ . Do bán kính của $(P; PB)$ và $(Q; QC)$ bằng nhau nên K nằm trên trục đẳng phương của $(P; PB)$ và $(Q; QC)$.

Ta thu được HK là đường thẳng Steiner của tứ giác $BCEF$. Do đó HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC là điểm cố định. \square