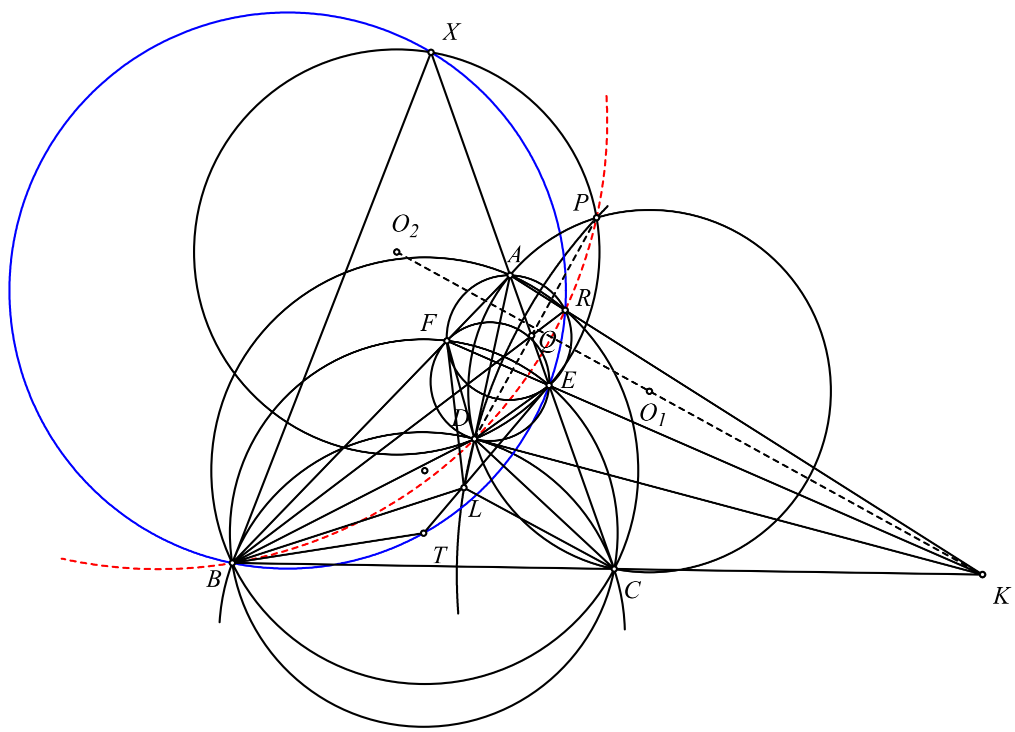
# Bài toán số 3 trong kì thi IMO năm 2021

Nguyễn Văn Linh

**Bài toán.** Cho $D$ là một điểm trong của tam giác nhọn $ABC$ với $AB > AC$ sao cho $\angle DAB = \angle DAC$. Điểm $E$ nằm trên đoạn thẳng $AC$ sao cho $\angle ADE = \angle BCD$, điểm $F$ nằm trên đoạn thẳng $AB$ thỏa mãn $\angle FDA = \angle DBC$ và điểm $X$ nằm trên đường thẳng $AC$ thỏa mãn $CX = BX$. Gọi $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $ADC$ và $EXD$. Chứng minh rằng các đường thẳng $BC$, $EF$ và $O_1O_2$ đồng quy.




*Lời giải. Cách 1.*

Gọi $L$ là điểm liên hợp đẳng giác của $D$ trong tam giác $ABC$.

Ta có $\angle LBA = \angle DBC = \angle FDA$ nên tứ giác $BFDL$ nội tiếp.

Tương tự, tứ giác $DECL$ nội tiếp.

Do $A, D, L$ thẳng hàng nên ta thu được $\overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AL} = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$. Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

Gọi $R$ là điểm Miquel của tứ giác $BFEC$ thì $AR$, $EF$, $BC$ đồng quy tại $K$.

Ta có $\angle EDF + \angle BDC = \angle EDA + \angle FDA + \angle BDC = \angle DCB + \angle DBC + \angle BDC = 180^\circ$. Suy ra $D$ có điểm liên hợp đẳng giác trong tứ giác $BFEC$. Từ đó $D$ và $L$ liên hợp đẳng giác trong tứ giác $BFEC$.

Ta thu được $\angle DFE + \angle DBC = \angle LFB + \angle LBF = 180^\circ - \angle BLF = \angle ELC = \angle EDC$. Suy ra $(EDF)$ và $(BDC)$ tiếp xúc nhau.

Xét trục đẳng phương của $(EDF)$, $(BDC)$ và $(BFEC)$ ta có $KD$ là tiếp tuyến chung của $(EDF)$ và $(BDC)$.

Gọi $P$ là giao điểm khác $D$ của $(K; KD)$ với $(ADC)$. Gọi $f$ là phép nghịch đảo qua $(K; KD)$.

Ta có $f: B \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow R$, $D \leftrightarrow D$, $P \leftrightarrow P$. Mà $A, D, C, P$ đồng viên nên $R, D, B, P$ đồng viên.

Xét trục đẳng phương của các đường tròn $(BDR)$, $(ABC)$, $(ADC)$ ta thu được $DP$, $AC$, $BR$ đồng quy tại $Q$.

Gọi $T$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$. Vì $R$ là điểm Miquel của tứ giác $BFEC$ nên tứ giác $RETB$ nội tiếp. Suy ra $\angle BRE = 180^\circ - \angle BTE = 180^\circ - 2\angle ECB = \angle BXE$. Suy ra tứ giác $XREB$ nội tiếp.

Từ đó $\overline{QE} \cdot \overline{QX} = \overline{QR} \cdot \overline{QB} = \overline{QD} \cdot \overline{QP}$. Suy ra tứ giác $XPED$ nội tiếp.

Suy ra $O_1$, $O_2$, $K$ đều nằm trên trung trực của $DP$. Vậy $O_1O_2$, $EF$, $BC$ đồng quy tại $K$.

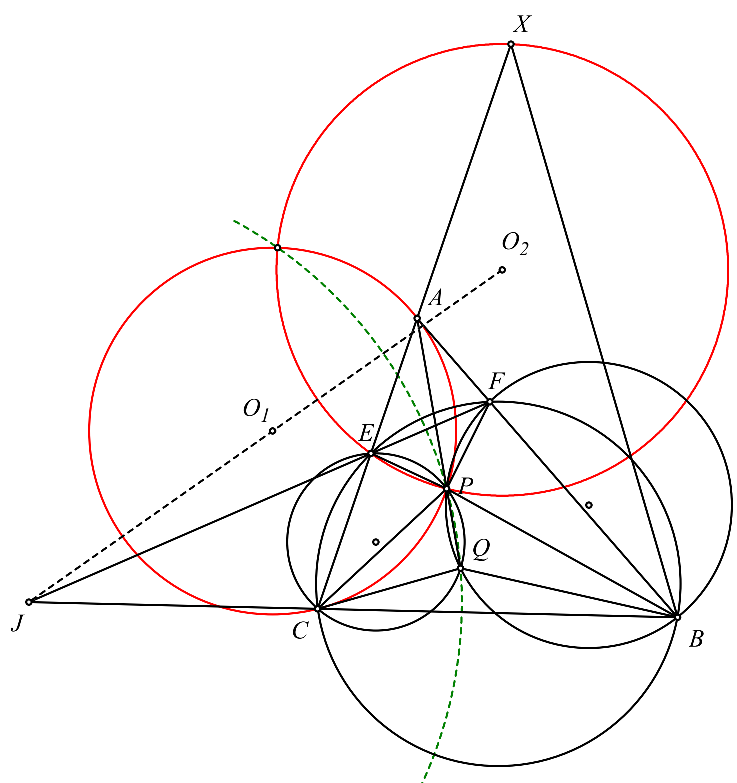
*Cách 2.*

Chứng minh tương tự lời giải 1 ta thu được $\angle LFE + \angle LBC = \angle ELC$. Suy ra $(ELF)$ tiếp xúc với $(BLC)$. Suy ra $LK$ là tiếp tuyến chung của $(ELF)$ và $(BLC)$.

Suy ra $KL^2 = KB \cdot KC = KD^2$. $(K; KD)$ là đường tròn $D$-Apollonius của tam giác $DBC$. Do đó ta có thể tổng quát bài toán như sau.

**Bài toán tổng quát.**

Cho tam giác $ABC$ và một điểm $P$ bất kì nằm trong tam giác $ABC$. $AP$ cắt đường tròn $P$-Apollonius của tam giác $BPC$ tại $Q$. $(CPQ)$ cắt $AC$ tại $E$, $(BPQ)$ cắt $AB$ tại $F$. Trung trực $BC$ cắt $AC$ tại $X$. Gọi $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $APC$, $XPE$. Chứng minh rằng $O_1O_2$, $EF$, $BC$ đồng quy.




*Lời giải.*

Gọi $(J)$ là đường tròn $P$-Apollonius của tam giác $BPC$. Gọi $f$ là phép nghịch đảo qua đường tròn $(J)$. Gọi $F'$ là ảnh của $E$ qua $f$.

$f: P \leftrightarrow P$, $Q \leftrightarrow Q$, $B \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow F'$.

Do $C, Q, P, E$ đồng viên nên $B, Q, P, F'$ đồng viên. Lại có $CEF'B$ là tứ giác nội tiếp nên $CE, PQ, BF'$ đồng quy tại $A$ và $F' \equiv F$.

Vậy $J, E, F$ thẳng hàng.

Ta chỉ cần chứng minh $(J)$, $(O_1)$, $(O_2)$ đồng trục.

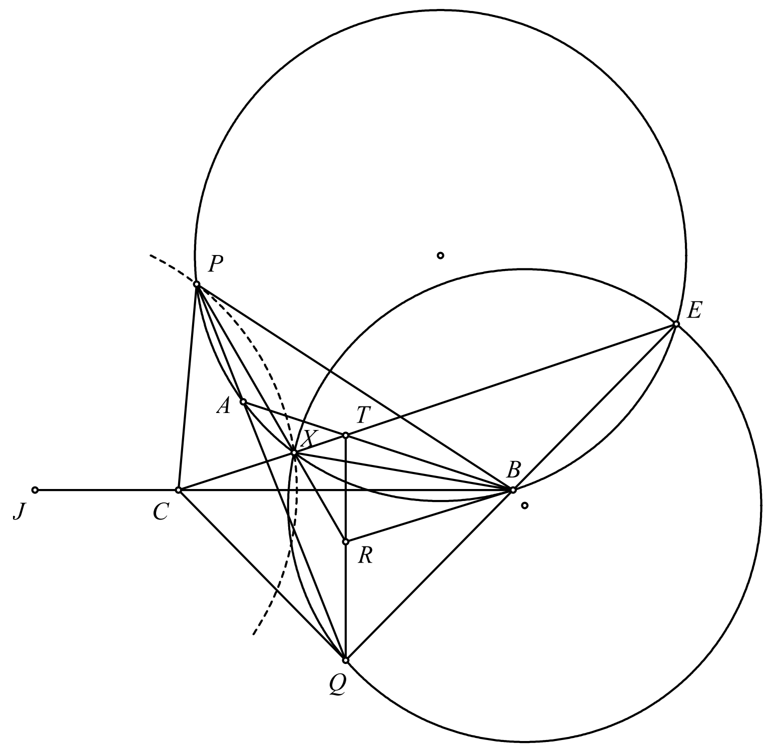
Gọi $g$ là hợp của phép nghịch đảo tâm $P$ phương tích $PB \cdot PC$ với phép đối xứng qua phân giác $\angle BPC$.

Gọi ảnh của các điểm $E, F, Q, X$ qua $g$ lần lượt là $E', F', Q', X'$. Gọi $d$ là trung trực của $BC$. Ta có $Q$ nằm trên $(J)$ và $g : (J) \leftrightarrow d$ nên $Q'$ nằm trên trung trực $BC$. $X$ là giao của $d$ với $AC$ nên $X'$ là giao của $(J)$ với $(APB)$. $E$ là giao của $AC$ với $(CPQ)$ nên $E'$ là giao của $(PA'B')$ với $Q'B'$.

Do $g(B) = C$ nên $g : (APC) \leftrightarrow A'B'$. Ta lại có $g : (PEX) \leftrightarrow E'X'$.

Từ các dữ kiện trên ta thu được bài toán mới qua phép nghịch đảo đối xứng như sau.

**Bài toán.** Cho tam giác $PBC$ và một điểm $Q$ bất kì nằm trên trung trực $BC$. $A$ là điểm bất kì nằm trên $PQ$. $QB$ cắt $(APB)$ tại $E$. Đường tròn $P$-Apollonius của tam giác $PBC$ cắt $(APB)$ tại $X$. Chứng minh rằng $AB$, $XE$ và trung trực của $BC$ đồng quy.




*Chứng minh.*

Gọi $R$ là giao của $PX$ với trung trực $BC$.

Ta có $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{PB}{PC}$ nên $\dfrac{CX}{CP} = \dfrac{BX}{BP}$. Suy ra $B$ nằm trên một đường tròn $C$-Apollonius của tam giác $CPX$. Mà $RB = RC$ và $R$ nằm trên $PX$ nên $(R; RB)$ là đường tròn $C$-Apollonius của tam giác $CPX$. Suy ra $RB^2 = RC^2 = RX \cdot RP$. Suy ra $RB$ là tiếp tuyến của $(PXB)$.

Gọi $T$ là giao điểm của $XE$ và $AB$.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & B & X \\ E & P & B \end{pmatrix}$ ta thu được $T, R, Q$ thẳng hàng.

Vậy $XE, AB$ và trung trực $BC$ đồng quy tại $T$. $\square$