Lời giải hai bài hình đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2020

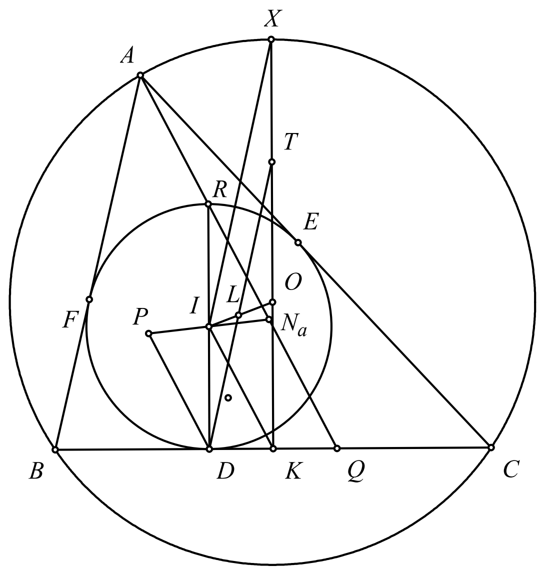
Nguyễn Văn Linh

Ngày 28/6/2020

Bài số 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; X, Y, Z lần lượt là điểm chính giữa cung BC, CA, AB chứa A, B, C.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua D, E, F và song song với IK, IM, IN đồng quy.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua D, E, F và song song với IX, IY, IZ đồng quy.



Lời giải. a) Gọi N_a là điểm Nagel của tam giác ABC. AN_a cắt BC tại Q. Ta có Q là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc A với BC, đồng thời AQ đi qua R là điểm đối xứng với D qua I.

Suy ra $IK \parallel N_aQ$.

Gọi P là điểm đối xứng với N_a qua I. Do $KD = KQ$, ta thu được $DP \parallel KI \parallel QN_a$.

Tương tự suy ra các đường thẳng lần lượt qua D, E, F và song song với IK, IM, IN đồng quy tại P.

b) Gọi T là điểm trên OX sao cho $DT \parallel IX$. Ta thu được $IDTX$ là hình bình hành, suy ra $TX = ID = r$.

Gọi L là giao điểm của OI với DT. Ta thu được $\dfrac{IL}{IO} = \dfrac{XT}{XO} = \dfrac{r}{R}$.

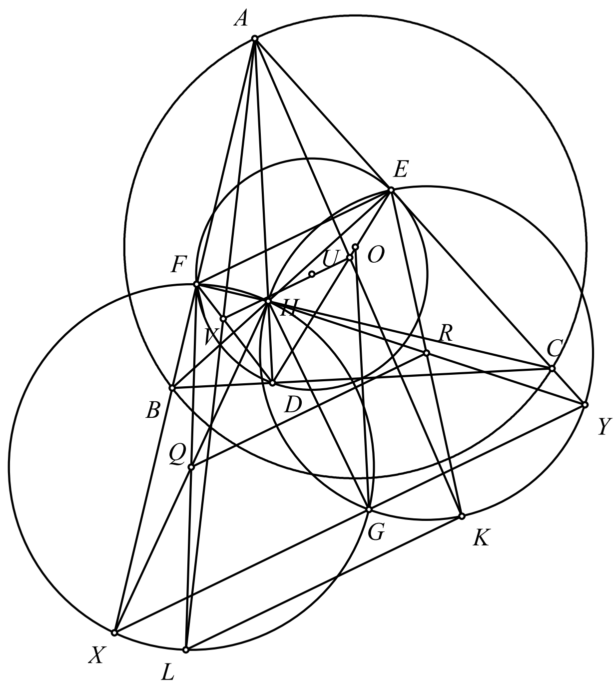
Tương tự ta thu được các đường thẳng lần lượt qua D, E, F và song song với IX, IY, IZ đồng quy tại L nằm trên OI. □

Bài số 6. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi G là điểm đối xứng với O qua BC. Kẻ các đường kính EK, FL của (GHE), (GHF).

a) Giả sử AK, AL lần lượt cắt DE, DF ở U, V. Chứng minh rằng UV song song với EF.

b) Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) ở B, C. Gọi T là giao điểm của DS và HG. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên TE, TF. Chứng minh rằng M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. a) Gọi Q, R lần lượt là tâm của đường tròn (HFG), (HEG). Ta có $QR \perp HG$.



Mặt khác, $AHGO$ là hình bình hành nên $HG \parallel AO$. Mà $AO \perp EF$ nên $HG \perp EF$.

Suy ra $EF \parallel QR \parallel LK$.

Gọi X, Y lần lượt là các điểm đối xứng với H qua Q, R. Do $\angle XFH = \angle YEH = 90^\circ$ nên X, Y lần lượt nằm trên AB, AC.

Ta có $XY \parallel QR \parallel EF$.

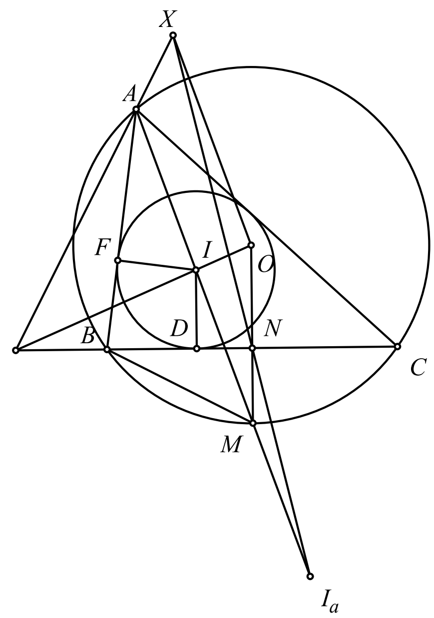
Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác FQX và ERY với chú ý rằng A là giao của FX và EY, H là giao của QX và RY, ta thu được FQ cắt ER tại một điểm W trên AH.

Xét hai tam giác FVL và EUK. Ta có FV cắt EU tại D, LV cắt KU tại A, FL cắt EK tại W. Mà D, A, W thẳng hàng nên lại theo định lý Desargues, ta thu được $EF \parallel LK \parallel UV$.

b) Ta sẽ chứng minh một kết quả thú vị hơn: các điểm M, N nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với I, I_a lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A. N là trung điểm BC. Một điểm X nằm trên I_aN sao cho $OX \parallel AI$. Khi đó AX, OI, BC đồng quy.



Chứng minh. Gọi D, F lần lượt là hình chiếu của I trên BC, AB; M là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O).

Ta có $\triangle AFI \sim \triangle BNM$ nên $\dfrac{AI}{IM} = \dfrac{AI}{BM} = \dfrac{IF}{MN} = \dfrac{ID}{MN}$.

Suy ra $\dfrac{AI}{OX} = \dfrac{AI}{IM} \cdot \dfrac{MI_a}{OX} = \dfrac{ID}{MN} \cdot \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{ID}{ON}$.

Suy ra AX, OI, DN đồng quy. □

Trở lại bài toán.

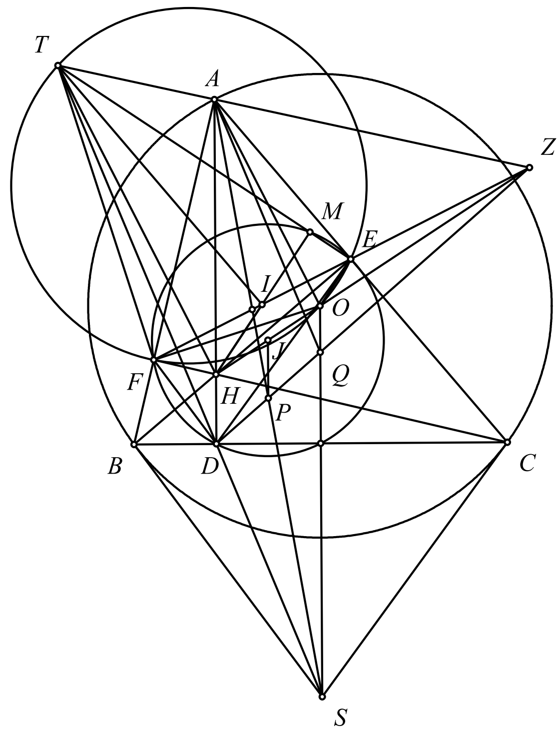
Ta có AS là đường đối trung của tam giác ABC nên AS đi qua trung điểm EF.

Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. P là trung điểm của AS. Ta có $JP \parallel AD \parallel OS$. Áp dụng bổ đề cho tam giác DEF ta thu được DP, HJ, EF đồng quy tại Z.

Gọi Q là giao của DP với OS. Ta có $PD = PQ$ nên $ADSQ$ là hình bình hành. Suy ra $AS \parallel DT$. Mà $TH \parallel AO$, $DH \parallel OQ$ nên AT, OH, DQ đồng quy tại Z.

Gọi I là trực tâm của tam giác TEH. Ta có $TI \perp HE$ nên $TI \parallel AE$. Lại có TA, IE, OH đồng quy nên $HI \parallel OE$, suy ra $TE \perp OE$. Tương tự $TF \perp OF$.

Ta có J nằm trên đường trung bình của hình thang vuông $HMEO$ nên $JM = JE$, tương tự $JN = JF$. Vậy M, N nằm trên đường tròn Euler (J) của tam giác ABC. □



Nhận xét. Câu a chỉ cần giả thiết G là điểm thỏa mãn $HG \perp EF$.

Ở câu b, nếu theo bài toán gốc thì T chỉ cần là một điểm bất kì trên HG. Lời giải chỉ sử dụng một số phép cộng góc cơ bản.