10.4 Bài tập

Bài 10.1. *(Hệ thức Euler) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$.*

Bài 10.2. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau và cùng tiếp xúc với đường thẳng d. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc với (O_1), (O_2) và d.*

Bài 10.3. *(ELMO Shortlist 2013) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao. AB là đường kính bất kì của (O_1). Dựng hai đường tròn qua A, O_1 và tiếp xúc với (O_2) lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng O_1, X, Y, B đồng viên.*

Bài 10.4. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của (O_1) cắt (O_2) tại C, tiếp tuyến tại A của (O_2) cắt (O_1) tại D. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD. I_1I_2 cắt AB tại E. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.*

Bài 10.5. *Cho tam giác ABC và hai điểm isodynamic P_1, P_2. Phép nghịch đảo tâm P, phương tích bất kì biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Chứng minh rằng $A'B'C'$ là tam giác đều có tâm là điểm P_2.*

Bài 10.6. *Cho hai điểm A và B nghịch đảo qua đường tròn (O). Một phép nghịch đảo $\mathcal{I}$ biến (O), A, B lần lượt thành $(O'), A', B'$. Chứng minh rằng A' và B' nghịch đảo qua đường tròn (O').*

Bài 10.7. *(ARMO 2011) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi N là điểm chính giữa cung BAC, M là trung điểm BC, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMC. Chứng minh rằng A, N, I_1, I_2 cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 10.8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I_a) bàng tiếp góc A tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của E trên DF. Đường tròn đường kính DF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng KF là phân giác của $\angle PKQ$.*

Bài 10.9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi (O_a), (O_b), (O_c) lần lượt là các đường tròn qua A, B, C và trực giao với (O). Dựng đường tròn ω_1 tiếp xúc ngoài với (O_a), (O_b), (O_c) và ω_2 tiếp xúc trong với (O_a), (O_b), (O_c). Chứng minh rằng (O), ω_1, ω_2 đồng trục.*

Bài 10.10. *Giả sử các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại A_1, A_2, A_3 và đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là tiếp điểm của (O_2) và (O_3); (O_1) và (O_3); (O_1) và (O_2). Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

Bài 10.11. *(Cosmin Pohoatza) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). P là một điểm chuyển động trên (O). Từ P kẻ hai tiếp tuyến tới (I), cắt BC tại K, L. Chứng minh rằng (PKL) luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 10.12. *Cho tam giác ABC có trực tâm H nằm trên đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng các đường tròn $(A; AH)$, $(B; BH)$, $(C; CH)$ có chung một tiếp tuyến.*

Bài 10.13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), với trực tâm H. Chứng minh rằng tồn tại 4 đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) và các đường tròn đường kính AH, BH, CH.*

Bài 10.14. *(IMO 2015) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), với trực tâm H. D là chân đường cao kẻ từ A, M là trung điểm BC. Trên (O) lấy điểm K sao cho $\angle AKH = 90°$, lấy điểm Q sao cho $\angle KQH = 90°$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KQH và DMQ tiếp xúc nhau.*

Bài 10.15. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với trực tâm H. (I) tiếp xúc với BC tại D. M là trung điểm của AH, E là hình chiếu của H trên AD. ME giao AI tại J. Chứng minh rằng $(J; JE)$ tiếp xúc với đường tròn (BHC).*

Bài 10.16. *(Iran TST 2007) Cho tam giác ABC. Một điểm O nằm trong tam giác thỏa mãn $OA = OB + OC$. Gọi Y, Z lần lượt là điểm chính giữa các cung AOC và AOB của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOC và AOB. Chứng minh rằng (BOY) tiếp xúc với (COZ).*

Bài 10.17. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), với tâm đường tròn nội tiếp I. AI giao (O) tại M. Đường tròn $(I; IM)$ cắt OM và (O) lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng PQ đi qua trực tâm của tam giác BIC.*

Bài 10.18. *(Đường tròn Hagge) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), với trực tâm H. P là điểm bất kì trong mặt phẳng. AP, BP, CP cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua BC, CA, AB. chứng minh rằng H, A_2, B_2, C_2 đồng viên.*

Bài 10.19. *Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì. Một đường tròn bất kì qua P cắt (BPC), (CPA), (APB) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. PA_1, PB_1, PC_1 lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.*

Bài 10.20. *Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AC giao BD tại P. Phép nghịch đảo tâm P phương tích bất kì biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành A', B', C', D'. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ cũng là một tứ giác ngoại tiếp.*

Bài 10.21. *Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q liên hợp đẳng giác. Chứng minh rằng ảnh của P, Q qua hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác góc A cũng là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.*

Bài 10.22. *(ELMO 2014) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC và BHC. Giả sử đường tròn đường kính AO cắt ω_1 tại M, AM cắt ω_1 tại X. Đường tròn đường kính AH cắt ω_2 tại N, AN cắt ω_2 tại Y. Chứng minh rằng $MN \parallel XY$.*

Bài 10.23. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I_a) bàng tiếp góc A cắt đường tròn A-mixtilinear nội tiếp tại M, N. Đường tròn $(A; AM)$ cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của (I) và (I_a).*

Bài 10.24. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (J) bất kì qua A tiếp xúc với đường tròn A-mixtilinear nội tiếp và cắt (O) tại P. Gọi Q là một điểm trên (J) sao cho $JQ \perp BC$. Chứng minh rằng tồn tại một trong hai vị trí của Q sao cho PQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.*

Bài 10.25. *(ELMO Shortlist 2013) Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. (ABP) giao AC tại Y, (ACP) giao AB tại Z. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua một điểm cố định khác A.*

Bài 10.26. *(IMO 2014) Cho tứ giác $ABCD$ có các góc B và D vuông. AH là đường cao tam giác ABD. S, T lần lượt thuộc AB, AC thỏa mãn $\angle BSH + \angle SCH = \angle DTH + \angle TCH = 90^\circ$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác (HST) tiếp xúc với BD.*

Bài 10.27. *(Morocco MO 2015) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi T là giao của đường tròn (BOC) với đường tròn qua A, C và tiếp xúc với AB. OT cắt BC tại K. Chứng minh rằng AK tiếp xúc với (O).*

Bài 10.28. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là trung điểm BC. X là một điểm bất kì nằm trên AM. BX, CX lần lượt cắt AC, AB tại D, E. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACE. O_1O_2 giao DE tại P, $(X; XA)$ giao (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$.*

Bài 10.29. *Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EAD, EBC, FAB, FCD.*

Bài 10.30. *Cho tứ giác $XYZT$. Tia YX cắt tia ZT tại U, tia TX cắt tia ZY tại V. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $XYZT.UV$; A, B lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác UTX, VYX, C, D lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc U, V của tam giác UYZ, VTZ. Chứng minh rằng A, B, C, D thuộc đường tròn (O) và MO là phân giác của $\angle XMZ$.*

Bài 10.31. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) với M là điểm Miquel.*
a) Hai điểm P, Q nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, $\triangle QBC \sim \triangle QDA$. Chứng minh rằng MI là phân giác của $\angle PMQ$.
b) Hai điểm K, L nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\triangle KAB \sim \triangle KDC$, $\triangle LBC \sim \triangle LAD$. Chứng minh rằng MI là phân giác của $\angle KPL$.