Bài số 6 trong kỳ thi chọn HSG Quốc gia năm 2019-2020

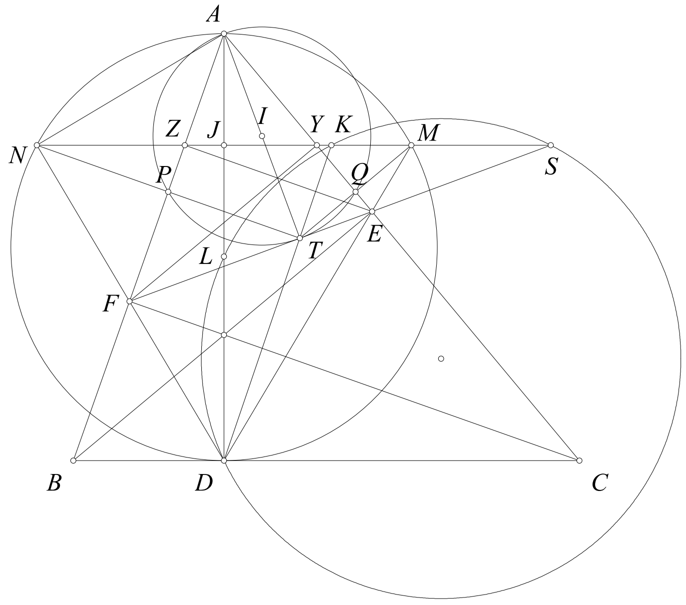
Nguyễn Văn Linh

Ngày 28 tháng 12 năm 2019

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn không cân. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AD cắt lại DE, DF lần lượt tại M, N. Lấy các điểm P, Q tương ứng trên AB, AC sao cho NP vuông góc AB, MQ vuông góc AC. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

a) Chứng minh rằng (I) tiếp xúc với EF.

b) Gọi T là tiếp điểm của (I) với EF. DT cắt MN tại K. Gọi L là điểm đối xứng với A qua MN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DKL đi qua giao điểm của EF và MN.



Lời giải. a) Kẻ AT vuông góc với EF.

Do $\angle AFE = \angle AFN = 90°$, $\angle AFT = \angle AFN$ nên $\triangle AFT = \triangle AFN$. Suy ra N đối xứng với T qua AB. Suy ra $TP \perp AB$. Tương tự $TQ \perp AC$.

Suy ra (I) tiếp xúc với EF tại T.

b) Gọi S là giao của EF và MN. MN cắt AE, AF lần lượt tại Y, Z. J là giao của AD với MN.

Do M, N lần lượt đối xứng với T qua AE, AF nên $EZ \perp AB$, $FY \perp AC$. Suy ra $(EF, TS) = -1$. Từ đó $D(EF, TS) = -1$, suy ra $(MN, KS) = -1$.

Do J là trung điểm MN nên theo hệ thức Newton, $\overline{JK} \cdot \overline{JS} = \overline{JM}^2 = -\overline{JM} \cdot \overline{JN} = -\overline{JA} \cdot \overline{JD} = \overline{JL} \cdot \overline{JD}$.

Suy ra tứ giác $DLKS$ nội tiếp. □

Nhận xét. Bài 6 khá nhẹ nhàng với ý tưởng sử dụng hệ thức Newton quen thuộc.