

Lời giải bài hình ngày 2 đề thi HSQ Quốc gia năm 2019

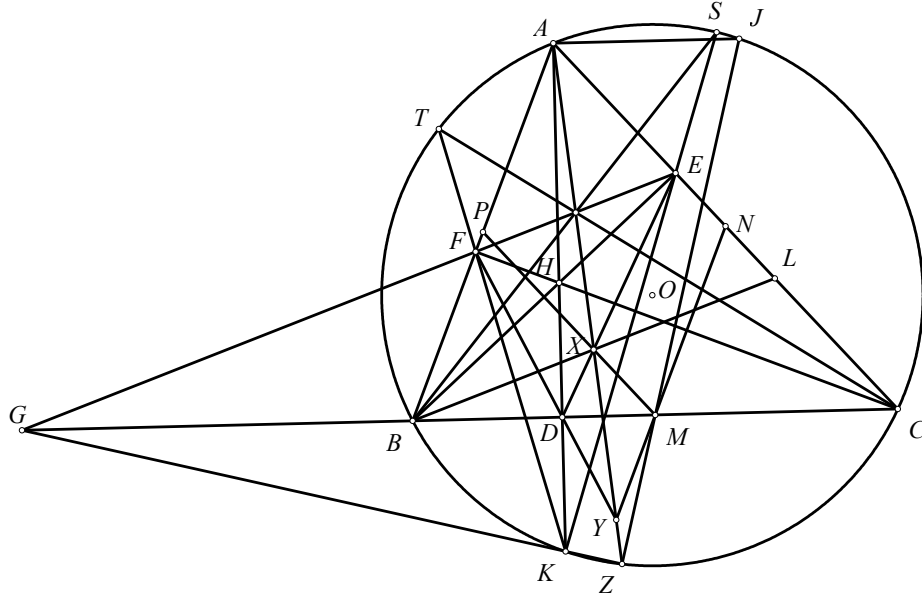
Nguyễn Văn Linh

Ngày 14/1/2019

Bài toán. Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D, E, F lần lượt là chân các đường cao ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC . Hai đường thẳng DE và MP cắt nhau tại X , hai đường thẳng DF và MN cắt nhau tại Y .

a) Đường thẳng XY cắt cung nhỏ BC của (O) tại Z . Chứng minh rằng bốn điểm K, Z, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng KE, KF lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai S và T (khác K). Chứng minh rằng các đường thẳng BS, CT và XY đồng quy.



Lời giải. a) Gọi L là giao điểm của BX với AC . Do MP là đường trung bình của tam giác ABC nên $XB = XL$.

Mặt khác, ta có $\angle XDM = \angle BAC = \angle BPM$ nên tứ giác $BPXD$ nội tiếp. Suy ra $\angle BXD = \angle BPD = \angle FED$ (do tứ giác $PFDE$ nội tiếp đường tròn Euler của tam giác ABC).

Từ đó $BL \parallel EF$. Mà AX là đường trung tuyến trong tam giác ABL nên AX là đường đối trung của tam giác ABC . Tương tự suy ra A, X, Y thẳng hàng và tứ giác $ABZC$ điều hòa.

Gọi J là giao điểm của ZM với (O) . Ta có ZM, ZA đẳng giác trong $\angle BZC$ nên $AJ \parallel DM$. Ta thu được tứ giác $DMZK$ nội tiếp.

Gọi G là giao điểm của KZ với BC . Ta có $\overline{GD} \cdot \overline{GM} = \overline{GK} \cdot \overline{GZ} = \overline{GB} \cdot \overline{GC}$. Suy ra $(GD, BC) = -1$. Ta thu được G, E, F thẳng hàng.

Từ đó $\overline{GE} \cdot \overline{GF} = \overline{GB} \cdot \overline{GC} = \overline{GK} \cdot \overline{GZ}$. Vậy K, Z, E, F đồng viên.

b) Vì $BL \parallel EF$ nên AX chia đôi EF . Do đó chỉ cần chứng minh BS, CT cùng đi qua trung điểm của EF . Đây là một kết quả quen thuộc, bạn đọc có thể xem ý b của bài số 3 VMO 2017 tại [1]. \square

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Linh, *Lời giải bài hình ngày 1 đề thi HSQ Quốc gia năm 2017*
<https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2017/01/bai-3-vmo-2017.pdf>