Lời giải bài hình ngày 1 đề thi HSQ Quốc gia năm 2019

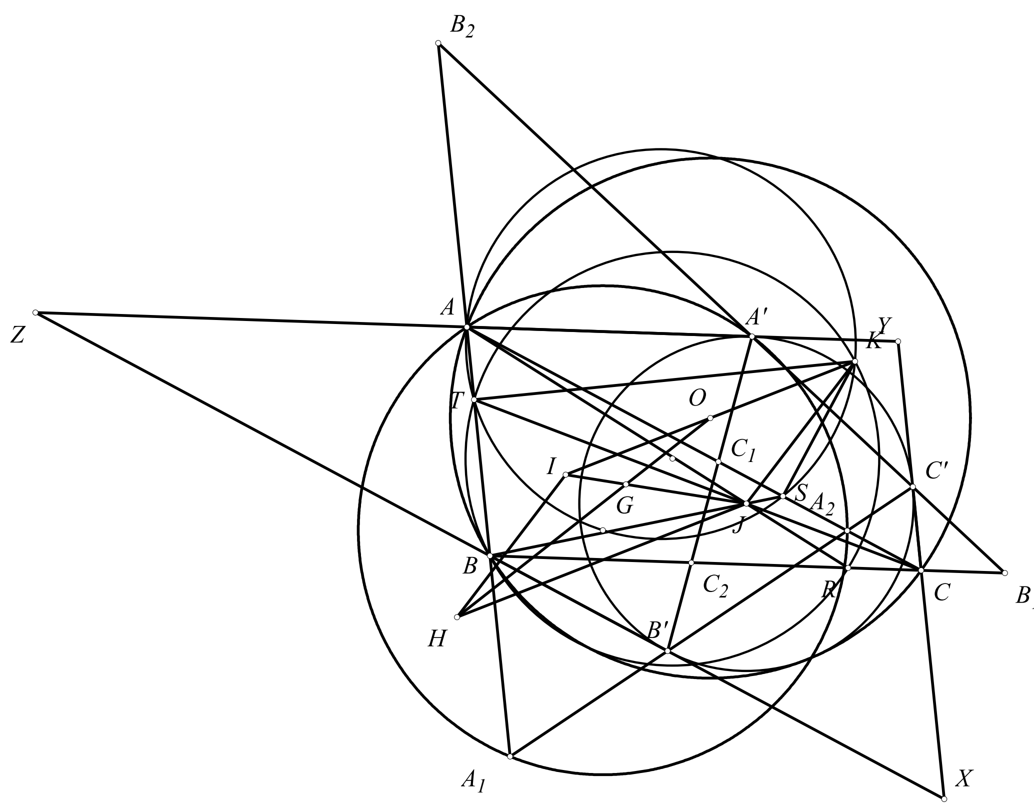
Nguyễn Văn Linh

Ngày 13/1/2019

Bài toán. Cho tam giác ABC với trực tâm H và tâm đường tròn nội tiếp I. Trên các tia AB, AC, BC, BA, CA, CB lần lượt lấy các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sao cho $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = CA, CC_1 = CC_2 = AB$. Các cặp đường thẳng $(B_1B_2, C_1C_2), (C_1C_2, A_1A_2), (A_1A_2, B_1B_2)$ lần lượt có các giao điểm là A', B', C'.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không vượt quá diện tích tam giác ABC.

b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Các đường thẳng AJ, BJ, CJ lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại R, S, T tương ứng. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AST, BTR, CRS cùng đi qua một điểm K. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không cân thì $IHJK$ là hình bình hành.



Lời giải. Gọi độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c.

a) Không mất tính tổng quát có thể giả sử $b > a > c$.

Qua B kẻ đường song song với AC cắt A_1A_2 tại B_3. Ta có tam giác BB_3A_1 cân tại B nên $BB_3 = BA_1 = a - c$.

Suy ra $\dfrac{BB_3}{CC_1} = \dfrac{a-c}{c} = \dfrac{BC_2}{CC_2}$. Suy ra B_3 nằm trên C_1C_2. Suy ra $B_3 \equiv B'$. Tương tự ta cũng có $AA' \parallel BC$, $CC' \parallel AB$.

Ta có $\angle A'B'C' = 180^\circ - \angle BB'C_2 - \angle BB'A_1 = 180^\circ - \angle CC_1C_2 - \angle AA_1A_2 = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle B_1 = \angle YA'C'$. Suy ra XY tiếp xúc với (J). Tương tự ta thu được (J) là đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

Mặt khác, ta có A, B, C là trung điểm 3 cạnh của tam giác XYZ. Vậy bài toán có thể quy về chứng minh $S_{A'B'C'} \leq \dfrac{1}{4}S_{XYZ}$.

Gọi R', r' là bán kính (XYZ) và $(A'B'C')$, d là khoảng cách giữa J và tâm ngoại tiếp tam giác XYZ, theo công thức Euler về diện tích, ta có $S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{4}S_{XYZ}\left|1 - \dfrac{d^2}{R'^2}\right| = \dfrac{1}{4}S_{XYZ}\left|1 - \dfrac{R'^2 - 2R'r'}{R'^2}\right| = \dfrac{1}{4}S_{XYZ}\dfrac{2R'r'}{R'^2}$.

Từ $R'^2 - 2R'r' = d^2 \geq 0$ ta thu được $2r' \leq R$. Suy ra $S_{A'B'C'} \leq \dfrac{1}{4}S_{XYZ}$.

b) Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC. Xét phép vị tự tâm G, tỉ số $\dfrac{-1}{2}$:

$\mathcal{H}_G^{\frac{-1}{2}} : X \mapsto A, Y \mapsto B, Z \mapsto C, J \mapsto I$. Suy ra $\dfrac{\overline{GI}}{\overline{GJ}} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{GO}}{\overline{GH}}$. Ta thu được $\overrightarrow{IO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HJ}$.

Mặt khác, J là điểm Nagel của tam giác ABC nên R, S, T là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A, B, C với BC, CA, AB. Gọi R', S', T' là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB suy ra R và R' đối xứng qua trung điểm M_a của BC. Mà các đường thẳng qua M_a, M_b, M_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại O nên ta thu được các đường thẳng qua R, S, T vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại K' đối xứng với I qua O. Hiển nhiên AK', BK', CK' là đường kính của $(AST), (BTR), (CRS)$ nên $K' \equiv K$. Vậy O là trung điểm IK. Suy ra $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{HJ}$. Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Một kết quả khá thú vị trong bài toán này là (O) tiếp xúc với (J) tại điểm Feuerbach của tam giác XYZ, cũng là điểm đồng quy của các đường tròn $(AA_1A_2), (BB_1B_2), (CC_1C_2)$.