Khai thác một bài toán hay từ đề thi Olympic hình học Sharygin năm 2017

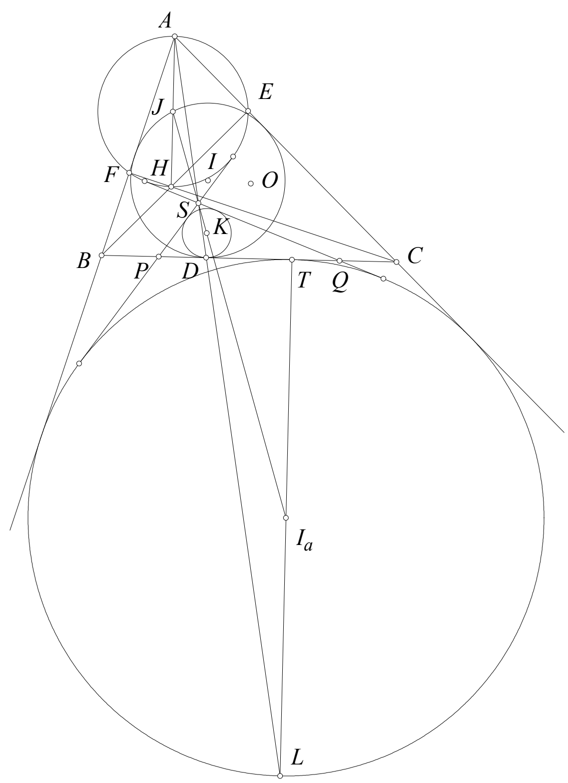
Nguyễn Văn Linh

Ngày 03/08/2017

Trong vòng chung kết cuộc thi Olympic hình học Sharygin 2017 có một bài toán của khối 9 khá thú vị như sau.

Bài 1. Cho tam giác ABC với các đường cao BE, CF và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi P, Q là giao của tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) với BC. Chứng minh rằng $BP = CQ$.

Sau đây chúng ta sẽ đưa ra lời giải cho bài toán này và tìm cách khai thác mở rộng.



Chứng minh. Gọi (J) là đường tròn (AEF), S là giao của hai tiếp tuyến chung trong; $(I), (K)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, SPQ; $(I), (K), (I_a)$ lần lượt tiếp xúc với BC tại D, D', T. L đối xứng với T qua I_a.

Ta có $JA \parallel I_aL$ và S là tâm vị tự trong của (J) và (I_a) nên A, S, L thẳng hàng.

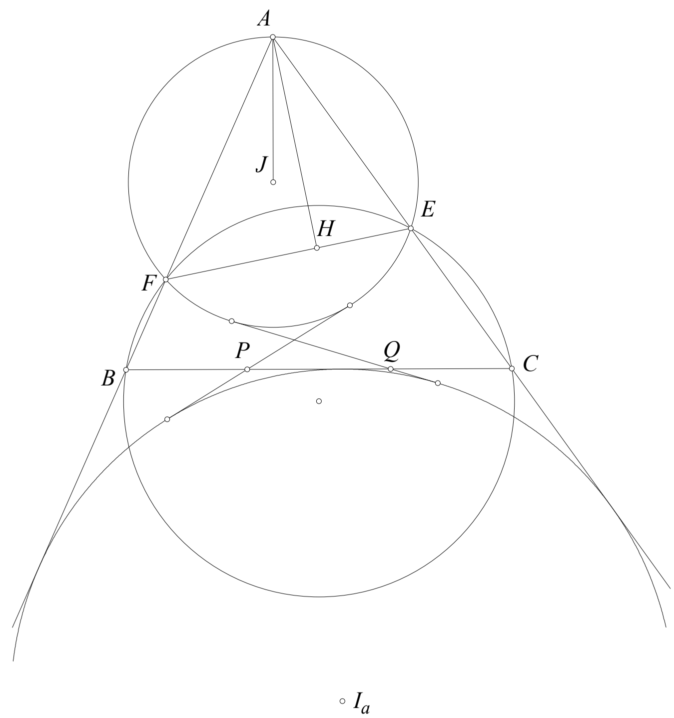
Lại có A là tâm vị tự ngoài của (I) và (I_a) đồng thời $ID \parallel I_aL$ nên A, D, L thẳng hàng. Do đó A, S, D, L thẳng hàng.

Mặt khác, S là tâm vị tự ngoài của (K) và (I_a) đồng thời $KD' \parallel I_aL$ nên S, D', L thẳng hàng. Suy ra $D' \equiv D$.

Từ đó ta có $DP = TQ$. Mà $DB = TC$ nên $BP = CQ$. $\square$

Có thể thấy trong lời giải bài toán 1 chỉ sử dụng đến dữ kiện $JA \perp BC$, do đó ta mở rộng bài toán 1 như sau.

Bài 2. Cho tam giác ABC với (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $BP = CQ$.



Có thể chứng minh hoàn toàn tương tự bài toán 1 với lưu ý rằng nếu gọi J là tâm của (AEF) và AH là đường cao của tam giác AEF thì AJ và AH đẳng giác trong $\angle BAC$. Đồng thời EF đối song với BC nên $AJ \perp BC$.

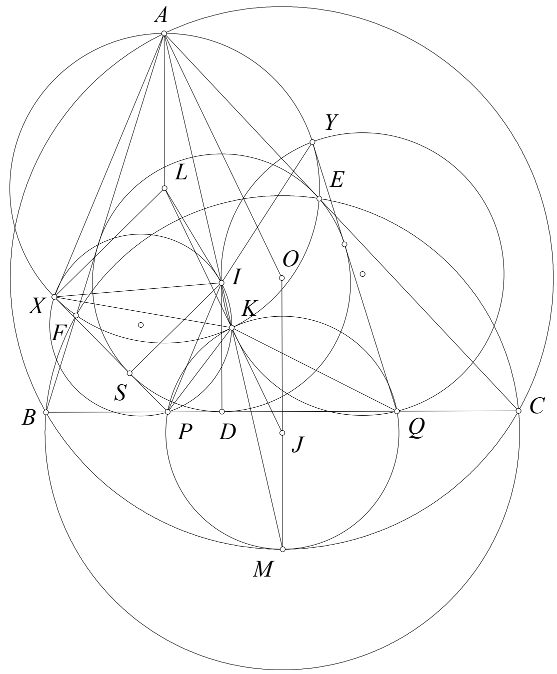
Nếu thay đường tròn bàng tiếp (I_a) bằng đường tròn nội tiếp (I) ta thu được bài toán tương tự bài 2.

Bài 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $BP = CQ$.

Qua khai thác, ta phát hiện một tính chất khá đẹp liên quan tới hình vẽ của bài toán 1, đó là đường tròn đường kính PQ tiếp xúc với (AEF) và (O).

Ta sẽ phát biểu tính chất này trong trường hợp tổng quát.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường tròn tâm J bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng (J, JP) tiếp xúc với (O) và (AEF).



Chứng minh. Gọi K, M lần lượt là giao của phân giác $\angle BAC$ với (AEF) và (O); L là tâm (AEF). Ta có K là điểm chính giữa cung EF của (L) nên L, K, J thẳng hàng. Theo bài 2, ta có $AL \perp BC$. Chứng minh tương tự $AO \perp EF$ nên $ALJO$ là hình bình hành.

Do đó $JK = LJ - LK = AO - AL = OM - OJ = JM$. Như vậy (J, JM) tiếp xúc với (O) và (L).

Lại theo bài 1, $BP = CQ$ nên $JP = JQ$. Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác $PKQM$ nội tiếp.

Do $MP = MQ$ nên ta cần chứng minh KM là phân giác $\angle PKQ$.

Gọi X, S lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua P của $(L), (I)$ với $(L), (I)$; Y là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua Q của $(L), (I)$ với (L). (I) tiếp xúc với BC tại D.

Ta có $IS \parallel LX, ID \parallel LA$ nên $\angle ALX + \angle SID = 180^\circ$. Suy ra $\angle PID + \dfrac{1}{2}\angle ALX = 180^\circ$ hay $\angle PID = \angle XAL$.

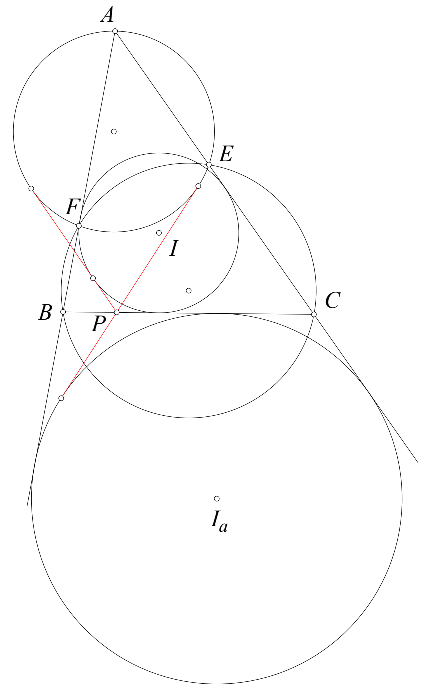
Từ đó $AX \parallel IP$. Ta thu được $\angle PIK = \angle XAK = \angle PXK$ hay tứ giác $PXIK$ nội tiếp.

Tương tự tứ giác $QYIK$ nội tiếp.

Suy ra $\angle PKM = \angle PXI = \angle IYQ = \angle MKQ$ (do PX và QY đối xứng nhau qua LI). Ta có đpcm. □

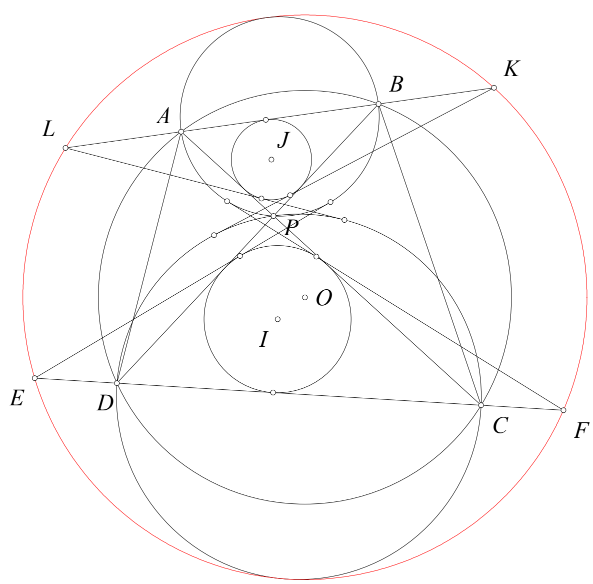
Nhận xét. Ta lại thay đường tròn nội tiếp (I) thành đường tròn bàng tiếp (I_a) với P', Q' là giao của tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) với BC thì (J, JP') vẫn tiếp xúc với $(O), (AEF)$ lần lượt tại M, K. Do đó $P' \equiv P, Q' \equiv Q$. Ta thu được bài toán sau.

Bài 5. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Một tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P. Chứng minh rằng P nằm trên tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a).



Sau đây ta phát biểu bài 4 dưới dạng khác đẹp hơn như sau.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Gọi $(I), (J)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác PCD, PAB. Hai tiếp tuyến chung trong của (I) và (PAB) cắt CD tại E, F. Hai tiếp tuyến chung trong của (J) và (PCD) cắt AB tại K, L. Chứng minh rằng E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn tâm O và đường tròn này tiếp xúc với $(PAB), (PCD)$.



Tất nhiên 4 điểm L, K, E, F nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn (PCD) và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PAB, đường tròn (PAB) và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PCD.

Để kết thúc bài viết, mời bạn đọc chứng minh một trường hợp đặc biệt của bài toán 4.

Bài 7. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của (I) và (I_a) với BC, M là trung điểm II_a, AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng (PMQ) tiếp xúc với (AH).

Tài liệu

[1] Sharygin Geometry Olympiad 2017.
http://geometry.ru/olimp/2017.php

Email: ***Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com***