Bài toán dựng hình từ đề Olympic hình học Sharygin năm 2017

Nguyễn Văn Linh

Ngày 30/07/2017

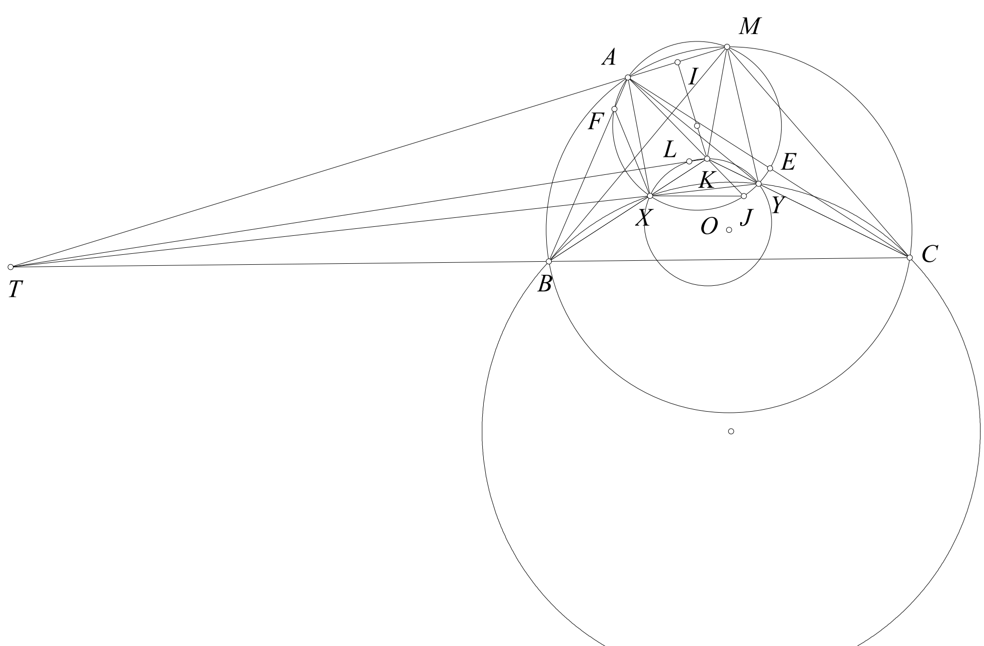
Cuộc thi Olympic hình học Sharygin lấy tên từ nhà sư phạm nổi tiếng I.F.Sharygin. Đây là một cuộc thi do Nga tổ chức và mở rộng ra quốc tế. Những năm gần đây, nhiều học sinh Việt Nam đã lọt vào vòng chung kết và đạt được một số thành tích đáng kể. Điển hình là Nguyễn Huy Hoàng từng đoạt HCB IMO năm 2015 là thí sinh Việt Nam đầu tiên giành được HCĐ Sharygin năm 2013.

Cấu trúc đề thi cũng rất thú vị khi có cả những bài toán hình học tổ hợp và dựng hình, là những phần khá xa lạ với học sinh Việt Nam. Theo thống kê thì chưa có học sinh Việt Nam nào được trên HCĐ có lẽ cũng vì lý do này. Đây thực sự là cuộc thi có chất lượng chuyên môn cao.

Bạn đọc quan tâm tới kì thi này có thể truy cập [1] để đọc hướng dẫn đăng kí thi vòng loại online, tổ chức từ tháng 1 tới đầu tháng 4 hàng năm.

Bài viết nhỏ này xin đưa ra hai cách giải cho một bài toán dựng hình trong đề thi vòng loại năm 2017, được phát biểu như sau.

Bài toán. *Dựng điểm K nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\angle KAB = 2\angle KBA$, $\angle KAC = 2\angle KCA$.*



Chứng minh. Giả sử K là điểm thỏa mãn đề bài.

Ta có $\angle BKC = \angle BAC + \angle KBA + \angle KCA = \angle BAC + \frac{1}{2}\angle KAB + \frac{1}{2}\angle KAC = \frac{3}{2}\angle BAC$.

Do đó K nằm trên cung chứa góc $\frac{3}{2}\angle BAC$ dựng trên đoạn thẳng BC.

Mặt khác, gọi X, Y lần lượt là giao của phân giác $\angle BAK$ với BK, phân giác $\angle CAK$ với CK.

Gọi (AXY) cắt AC, AB lần lượt tại E, F, AK cắt (AXY) lần thứ hai tại J.

Ta có $\angle BFX = \angle XJA$, $\angle FBX = \angle XAF = \angle XAJ$, $AX = BX$ nên $\triangle AXJ = \triangle BXF$ $(g.c.g)$. Suy ra $AJ = BF$. Tương tự, $AJ = CE$. Vậy $BF = CE$.

Gọi M là giao của (AEF) với (O). Dễ thấy $\triangle MFB = \triangle MEC (g.c.g)$. Suy ra $MB = MC$ hay M là điểm chính giữa cung BAC.

Ta có $\angle XAK = \angle XBA$ nên AK tiếp xúc với (AXB). Tương tự AK tiếp xúc với (AYC). Suy ra $KX \cdot KB = KA^2 = KY \cdot KC$, hay tứ giác $BXYC$ nội tiếp.

Xét 3 đường tròn $(AXY), (O), (BXYC)$ có trục đẳng phương lần lượt là AM, XY, BC. Do đó AM, XY, BC đồng quy tại T.

Gọi L là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BXYC.KT$. Do tứ giác $BXYC$ nội tiếp nên L nằm trên TK.

Suy ra $TK^2 = TL \cdot TK + KL \cdot KT = TX \cdot TY + KX \cdot KB = TA \cdot TM + KA^2$.

Kẻ $KI \perp AM$.

Ta có $TI^2 + IK^2 = TK^2 = TA \cdot TM + AK^2 = TA \cdot TM + AI^2 + IK^2$.

Suy ra $TA \cdot TM + AI^2 = TI^2 = (TA + AI)^2 = TA^2 + AI^2 + 2TA \cdot AI$ hay $TA \cdot TM = TA^2 + 2TA \cdot AI$. Từ đó $TM = TA + 2AI$ hay I là trung điểm AM. Vậy $KA = KM$.

Từ đó ta thu được cách dựng như sau.

- Dựng góc $\dfrac{3}{2}\angle BAC$.

- Dựng cung ω chứa góc $\dfrac{3}{2}\angle BAC$ trên đoạn thẳng BC sao cho cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC chứa A.

- Dựng M là điểm chính giữa cung BAC của (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

- Trung trực AM cắt ω tại K thỏa mãn đề bài. □

Nhận xét. Rõ ràng nếu ta dựng được hai điểm X, Y nằm trên trung trực AB, AC sao cho tứ giác $BXYC$ nội tiếp và XY đi qua T thì K sẽ là giao điểm của BX và CY.

Sử dụng phép nghịch đảo ta thu được cách dựng khác như sau, mời bạn đọc tự kiểm tra.

- Dựng M, E, F lần lượt là điểm chính giữa cung BAC của (O), trung điểm AC, AB.

- AM cắt BC tại T.

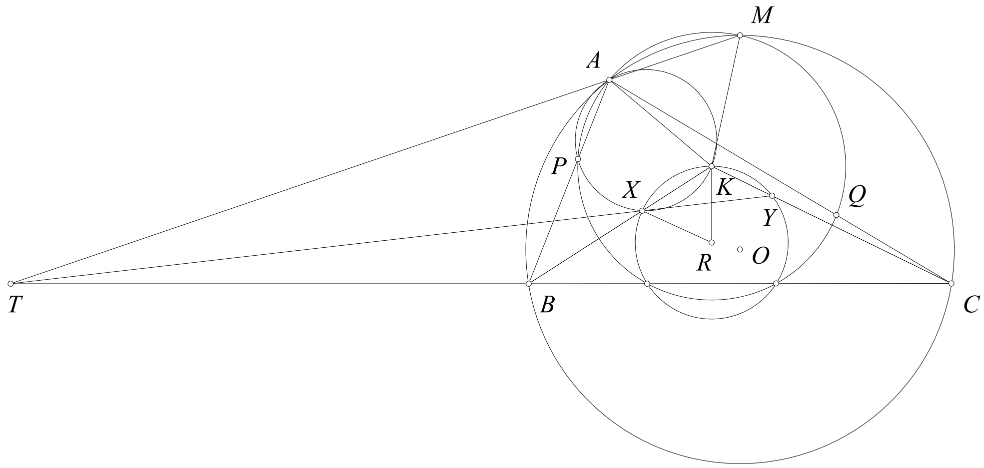
- Dựng các đường tròn ω_1, ω_2 là ảnh của OE, OF qua phép nghịch đảo tâm T, phương tích $k = \overline{TB} \cdot \overline{TC}$ (Chú ý rằng hoàn toàn có thể dựng bằng thước và compa ảnh của một đường thẳng hay một đường tròn cho trước qua phép nghịch đảo khi biết tâm và phương tích).

-ω_1 cắt OF tại X, ω_2 cắt OE tại Y.

-BX cắt CY tại K là điểm cần dựng.

Ngoài ra ta có tính chất sau.

Tính chất. *(AKX) cắt AB tại P, (AKY) cắt AC tại Q. Khi đó A, M, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm K.*



Chứng minh. Gọi R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XKY. Ta có $\angle XKR = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle XKR = 90^\circ - \angle KYX = 90^\circ - \angle KBC$.

Suy ra $KR \perp BC$.

Lại có $\overline{TA} \cdot \overline{TM} = \overline{TX} \cdot \overline{TY}$ nên T thuộc trục đẳng phương của (KXY) và (K, KA).

Do đó BC là trục đẳng phương của (KXY) và (K, KA).

Lại có $\overline{BX} \cdot \overline{BK} = \overline{BP} \cdot \overline{BA}$ nên $P \in (K, KA)$. Tương tự $Q \in (K, KA)$. □

Tài liệu

[1] Sharygin Geometry Olympiad.
http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php

Email: ***Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com***