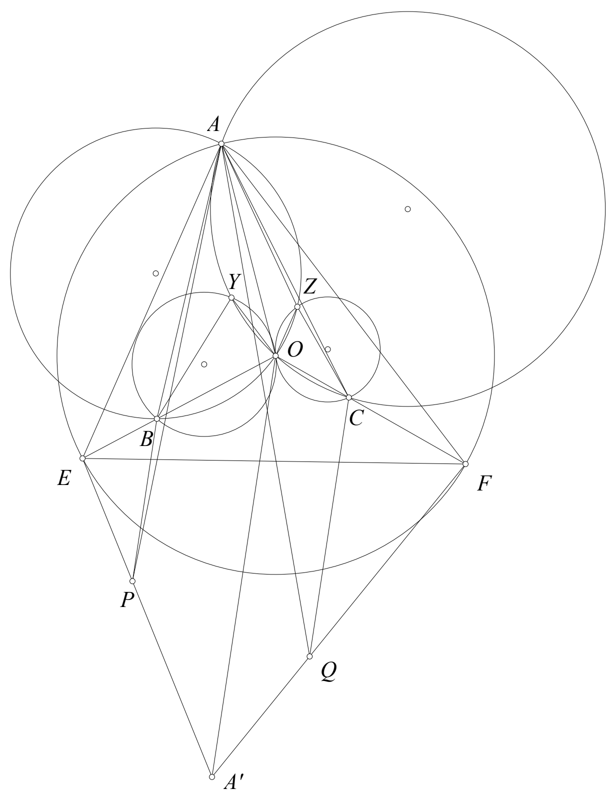
Bài tập ôn luyện đội tuyển IMO năm 2016

Nguyễn Văn Linh

Bài 1. *(Iran TST 2007)*. Cho tam giác ABC. Một điểm O nằm trong tam giác thỏa mãn $OA = OB + OC$. Gọi Y, Z lần lượt là điểm chính giữa các cung AOC và AOB của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOC và AOB. Chứng minh rằng (BOY) tiếp xúc với (COZ).

Chứng minh. Cách 1.



Dựng hai điểm E, F trên tia OB, OC sao cho $OA = OE = OF$. Hai điểm P, Q thỏa mãn các cặp tam giác AOC và AEP, AOB và AFQ đồng dạng cùng hướng. Gọi A' đối xứng với A qua BC.

Ta có $\angle AEP = \angle AOC = 2\angle AEF = \angle AEA'$ nên $P \in EA'$. Tương tự $Q \in FA'$.

Theo giả thiết $OA = OB + OC$ nên $BE = OC$. Do đó từ cặp tam giác đồng dạng AOC và AEP ta thu được $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AE}{EP}$ hay $\dfrac{EO}{EB} = \dfrac{EA'}{EP}$. Suy ra $PB \parallel A'O$. Tương tự $QC \parallel A'O$.

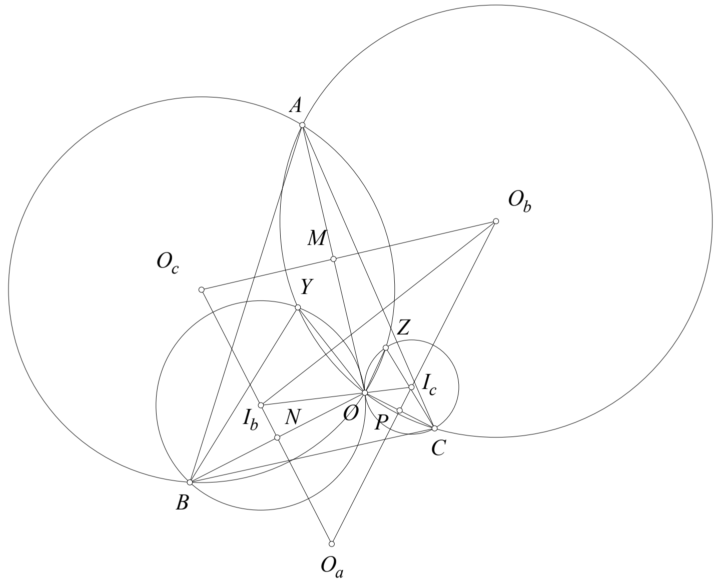
Mặt khác, $\angle AZO = \angle ABE, \angle AOZ = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle AOB = \angle AEB$ nên $\triangle AZO \sim \triangle ABE$. Mà $\triangle ACO \sim \triangle APE$ nên $\triangle OZC \sim \triangle EBP$.

Chứng minh tương tự $\triangle BYO \sim \triangle QCF$.

Vậy $\angle BYO + \angle CZO = \angle EBP + \angle FCQ = \angle EOA' + \angle FOA' = \angle BOC$.

Kẻ tiếp tuyến Ot của (BOY) ta có $\angle BOt = \angle BYO$, do đó $\angle COt = \angle CZO$ hay Ot là tiếp tuyến của (CZO). Vậy hai đường tròn (BOY) và (CZO) tiếp xúc nhau.

Cách 2.



Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOY, COZ.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm OA, OB, OC.

Do $I_bO_b \perp OY, O_bO_c \perp OA$ nên $\angle I_bO_bO_c = \angle YOM$.

Tương tự $\angle I_bO_bO_a = 180^\circ - \angle YOC$.

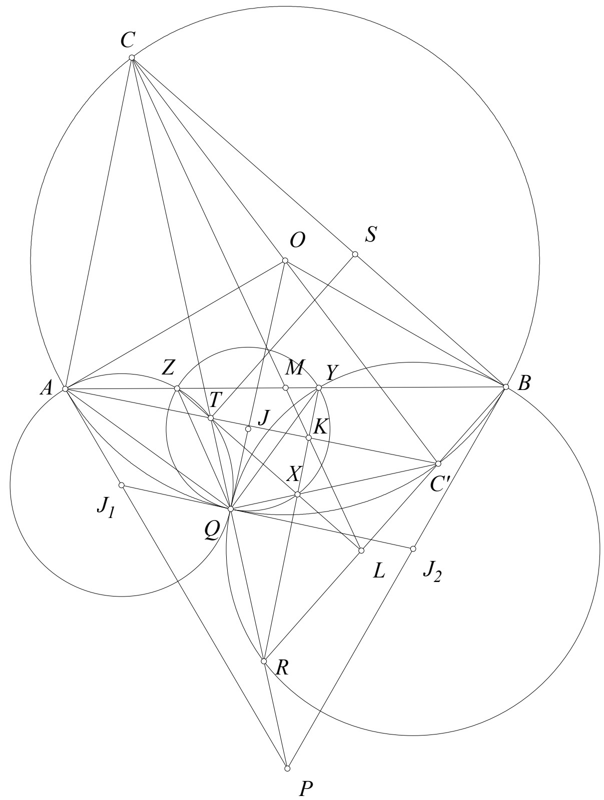
Theo giả thiết Y là điểm chính giữa cung AOC nên OY là phân giác ngoài $\angle AOC$. Từ đó suy ra $\angle I_bO_bO_c = \angle I_bO_bO_a$ hay I_b là chân phân giác kẻ từ O_b của tam giác $O_aO_bO_c$.

Tương tự I_c là chân phân giác kẻ từ O_c của tam giác $O_aO_bO_c$.

Lại có $OA = OB + OC$ nên $OM = ON + OP$, tức là khoảng cách từ O đến O_bO_c bằng tổng khoảng cách từ O đến O_aO_b và O_aO_c. Theo kết quả quen thuộc O nằm trên I_bI_c. Vậy (I_b) tiếp xúc với (I_c) tại O. $\square$

Bài 2. *(ARMO 2016)* Cho tam giác nhọn ABC, $AC < BC$, M là trung điểm AB và Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm của Ω. AC', BC' giao CM lần lượt tại K, L. Đường thẳng qua K vuông góc với AC' giao đường thẳng qua L vuông góc với BC' giao AB và cắt nhau tạo thành tam giác Δ. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác Δ và Ω tiếp xúc nhau.

Chứng minh. (Cách 1)



Gọi Q là giao điểm của đường đối trung ứng với đỉnh C với (O). AC' giao AQ tại T,BC' giao CP tại R. Gọi S là hình chiếu vuông góc của T trên CB.

Do T nằm trên đường đối trung ứng với đỉnh C của tam giác ABC và $\triangle CAT \sim \triangle CBL$, nên $\frac{TA}{TS} = \frac{CA}{CB} = \frac{TA}{LB}$. Suy ra $TS = LB$ hay $TL \perp RB$ hay Z, T, L thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, R, Y, X thẳng hàng. Ta thu được X là trực tâm của tam giác TRC'. Nhưng $\angle CQC' = 90^\circ$ nên Q, X, C' thẳng hàng.

Mặt khác, $ZT \parallel CB$ nên áp dụng định lý Reim, tứ giác $AZTQ$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, $BYQR$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\angle ZQY = \angle ZQT + \angle TQY = \angle C'AB + \angle C'BA = 180^\circ - \angle AC'B = \angle ZXY$. Ta thu được $Q \in (XYZ)$.

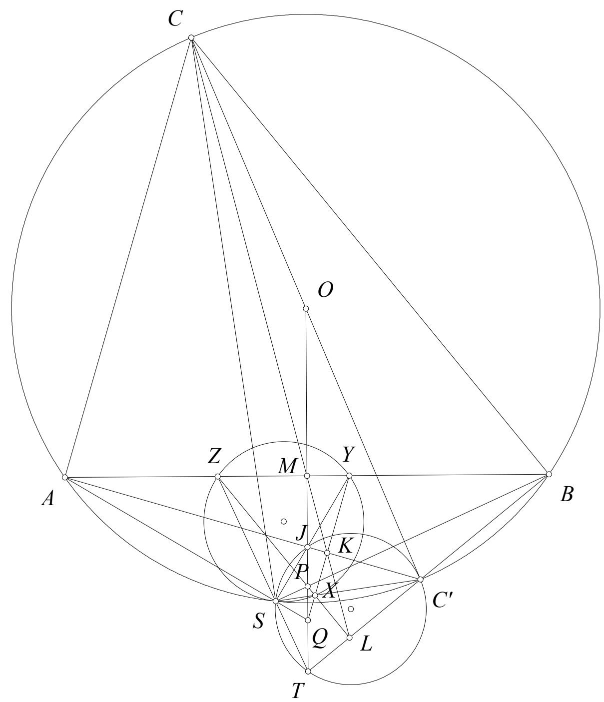
Gọi Qt là tiếp tuyến của (O). Ta có $\angle tQC' = \angle QAC' = \angle QZX$ nên Qt cũng là tiếp tuyến của (J). Suy ra đpcm.

(Cách 2).

Ta phát biểu và không chứng minh các tính chất sau của tam giác paralogic (xem bài viết tam giác paralogic tại đây: https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/02/03/paralogic-triangles/)

Cho hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ là hai tam giác paralogic ứng với bộ 3 thẳng hàng (A_1, B_1, C_1). Khi đó (ABC) và $(A_2B_2C_2)$ trực giao, hai đường tròn này giao nhau tại hai điểm, một điểm là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCA_1B_1C_1$, một điểm là giao của AA_2, BB_2, CC_2.

Trở lại bài toán.



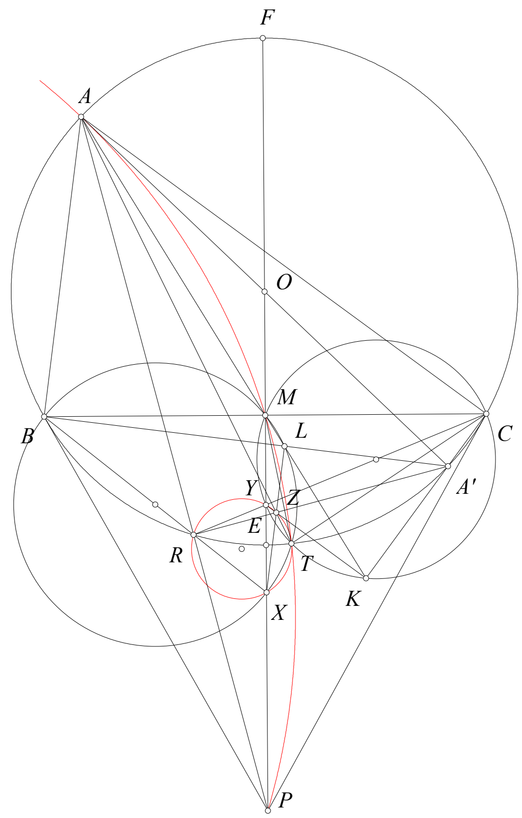
Gọi J, T lần lượt là giao điểm của OM với AC', BC'.

Do hai tam giác XYZ và TJC' là hai tam giác paralogic ứng với bộ (M, K, L) ta thu được (XYZ) trực giao với (JTC'). Gọi S là giao điểm thứ hai của (TJC') và (O). Do TJC' và ABC là hai tam giác paralogic ứng với (A, M, B) nên S là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCAMB$ hay là giao điểm của đường tròn qua M, A và tiếp xúc với CA, qua M, B và tiếp xúc với CB. Suy ra $\angle MSA = \angle CAM = \angle CSB$ hay $CABS$ là tứ giác điều hòa.

Gọi P, Q lần lượt là giao của MO với ZL, YK suy ra XPQ và $AC'B$ là hai tam giác paralogic ứng với bộ (M, K, L). Gọi S' là giao điểm của (XPQ) và $(AC'B)$ sao cho $C'X, BP, AQ$ đồng quy tại S'. Suy ra $\angle S'CA = \angle S'C'A = \angle XLK = \angle LCB$ hay CS' là đường đối trung của tam giác ABC. Nghĩa là $S' \equiv S$ hay S, X, C' thẳng hàng. Ta biết rằng XC', ZT, YJ đồng quy tại giao điểm của (XYZ) và (JTC'). Do đó $(XYZ), (JTC'), (O)$ đồng quy tại S. Mà (XYZ) và (O) đều trực giao với (JTC') nên (XYZ) tiếp xúc với (O) tại S.

$\square$

Bài 3. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai tiếp tuyến của (O) tại B, C giao nhau tại P. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. BA', CA' giao AM lần lượt tại L, K. Đường thẳng qua L vuông góc với BA', qua K vuông góc với CA' và đường thẳng OP cắt nhau tạo thành tam giác XYZ. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (AMP).

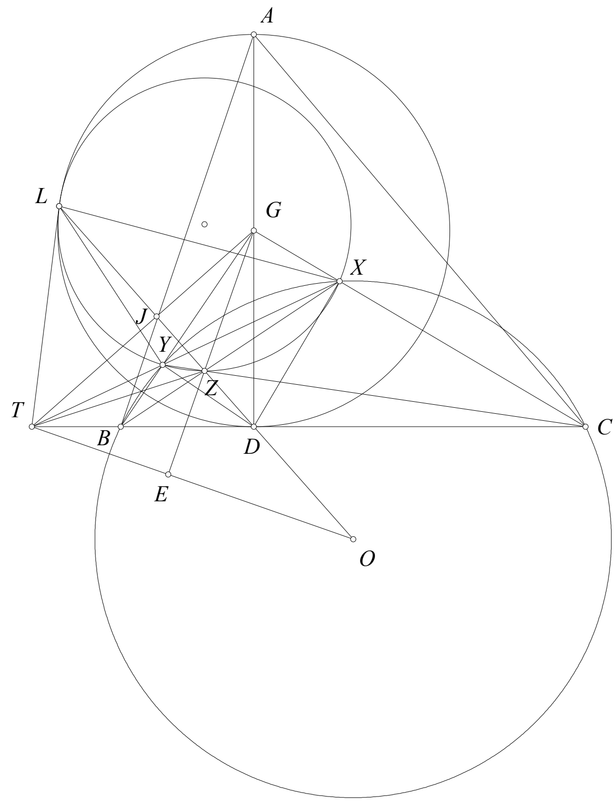


Chứng minh. Dễ thấy XYZ và BCA' là hai tam giác paralogic ứng với (L, X, M). Suy ra (XYZ) trực giao với (O). Gọi E, F lần lượt là trung điểm cung BC và cung BAC ta thu được $OE^2 = OM \cdot OP$ suy ra (AMP) cũng trực giao với (O). Vậy ta chỉ cần chứng minh 3 đường tròn $(XYZ), (AMP)$ và (O) đồng quy.

Gọi T và R là giao điểm của (XYZ) và (O) (T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCA'MLK$, R là giao điểm của $BX, CY, A'Z$).

Ta có $\angle RAB = \angle RCB = \angle MKY = \angle MAC$ nên $R \in AP$. Suy ra $\angle PMT = \angle RCT = \angle PAT$ hay $T \in (AMP)$. Suy ra đpcm. $\square$

Bài 4. *(Trịnh Huy Vũ).* Cho tam giác ABC. Đường cao AD ($D \in BC$), G là trung điểm AD. Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của D trên GC, GB. BX giao CY tại Z. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (AD).



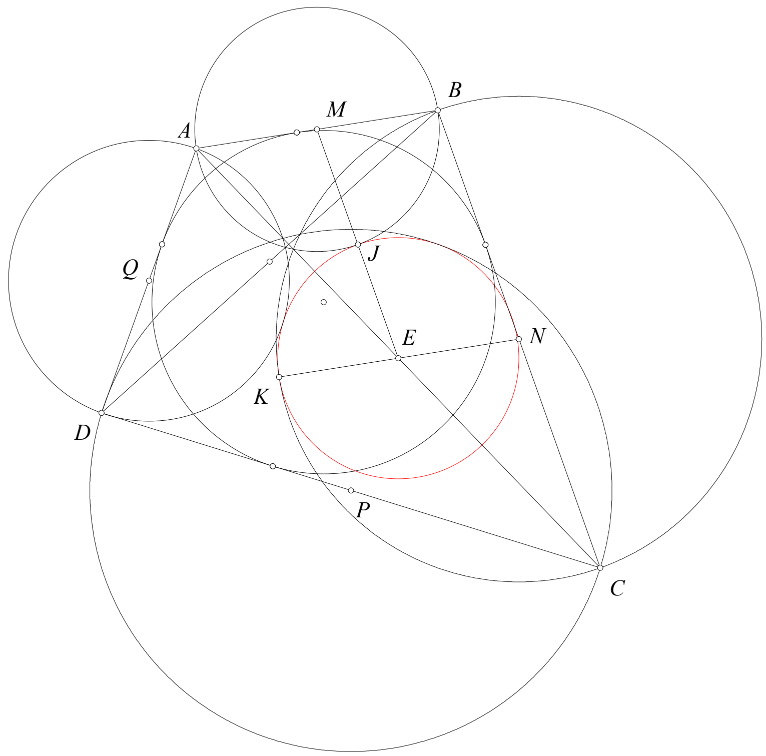
Chứng minh. Gọi T là giao điểm của XY và BC. Ta có tứ giác $GYDX$ nội tiếp nên $\angle GYX = \angle GDX = \angle GCB$, suy ra tứ giác $BYXC$ nội tiếp đường tròn (O). Theo định lý Brocard, OZ vuông góc với TG tại J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BYXCGT$. Do $(GYXD)$ tiếp xúc với BC tại D nên $TD^2 = TY \cdot TX = TJ \cdot TG$, suy ra $DJ \perp TG$. Suy ra O, D, Z, J thẳng hàng. Gọi L là điểm đối xứng với D qua J, GZ giao OT tại E.

Ta có $TL^2 = TD^2 = TY \cdot TZ$ nên (LYX) tiếp xúc với G tại L. Do J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCYXGT$ nên $J \in (YOC)$ và (BOX).

Ta có $ZY \cdot ZC = ZX \cdot ZB = ZL \cdot ZO = ZG \cdot ZE = ZD \cdot ZL$. Suy ra $LYDC$ và $LXBD$ nội tiếp.

Do đó $\angle LYZ + \angle LXZ = \angle LDC + \angle LDB = 180^\circ$ hay $L \in (XYZ)$. Vậy (XYZ) tiếp xúc với (G) tại L. □

Bài 5. *(Ba Lan 2013)* Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Chứng minh rằng tồn tại đường tròn tiếp xúc với các đường tròn đường kính AB, BC, CD, DA.



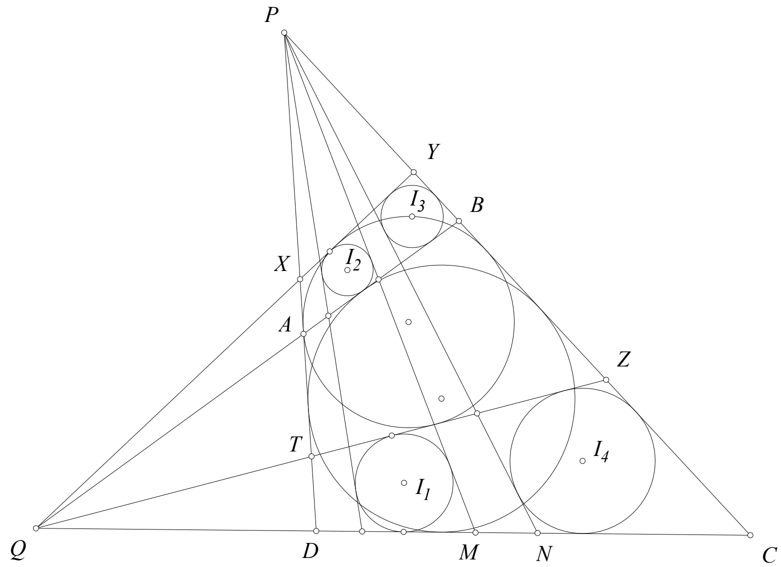
Chứng minh. Không mất tổng quát giả sử $BC > AB$.

Gọi E là trung điểm AC, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Tia NE cắt (BC) tại K. Ta có $EK = NK - NE = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB$. Do đó đường tròn tâm E, bán kính $\frac{1}{2}(BC - AB)$ tiếp xúc với (BC).

Chứng minh tương tự, $(E, \frac{1}{2}(BC - AB))$ tiếp xúc với (AB), $(E, \frac{1}{2}(CD - AD))$ tiếp xúc với $(CD), (AD)$. Mà tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ hay $BC - AB = CD - AD$. Suy ra $(E, \frac{1}{2}(BC - AB))$ tiếp xúc với cả 4 đường tròn đường kính AB, BC, CD, DA.

Tương tự ta cũng có đường tròn có tâm là trung điểm BD, bán kính bằng $\frac{1}{2}|AB - AD|$ tiếp xúc với 4 đường tròn trên. □

Bài 6. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Gọi P, Q lần lượt là giao của AD và BC, AB và CD, d_1, d_2 là 2 đường thẳng bất kì qua P. Dựng 2 đường tròn $(I_1), (I_2)$ lần lượt nội tiếp các tam giác tạo bởi AB, d_1, d_2 và CD, d_1, d_2. Từ Q kẻ 2 tiếp tuyến l_1, l_2 khác AB, CD tới $(I_1), (I_2)$. Chứng minh rằng d_1, d_2, AD, BC cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.



Chứng minh. Kí hiệu (d_1, d_2, d_3, d_4) là tứ giác tạo bởi giao điểm của 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4.

Dựng đường tròn (I_3) và (I_4) lần lượt nội tiếp tam giác QYB và QZC.

Từ P kẻ đường thẳng d_3 khác BC tiếp xúc với (I_4).

Áp dụng bài toán 2 suy ra tứ giác (d_3, QY, QB, PB) ngoại tiếp.

Do các tứ giác $ABCD$ và (QZ, PN, QC, PC) ngoại tiếp nên áp dụng bổ đề 1 suy ra tứ giác (PN, QZ, QA, PA) ngoại tiếp.

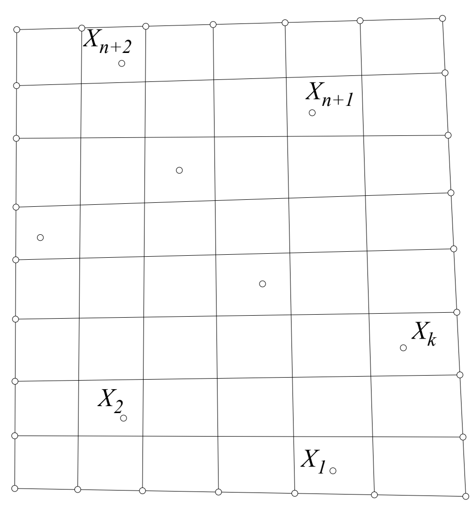
Mà tứ giác (PN, QB, QY, PB) ngoại tiếp nên lại áp dụng bổ đề 1 suy ra tứ giác $XYZT$ ngoại tiếp. □

Bài 7. *(Fakazas Tunde)* Cho tứ giác $ABCD$, AB giao CD tại P, AD giao BC tại Q. Từ mỗi điểm P và Q kẻ $n-1$ đường thẳng chia tứ giác $ABCD$ thành một ma trận có n hàng và n cột. Từ n^2 tứ giác con ta có thể chọn được n tứ giác ngoại tiếp sao cho mỗi hàng và mỗi cột có đúng một tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.

Chứng minh. -Trường hợp $n = 2$, bài toán hiển nhiên đúng.

-Xét trường hợp $n = k$. Nếu một tứ giác chứa tứ giác nhỏ ngoại tiếp nằm ở 1 trong 4 góc của tứ giác thì ta có thể quy nạp về trường hợp $n = k - 1$.

Vì vậy ta xét bài toán trong trường hợp không có tứ giác ngoại tiếp nằm ở 1 trong 4 góc.



Ta đơn giản hóa bài toán bằng một bảng ô vuông $n \cdot n$, trong đó các đường thẳng thuộc các hàng đồng quy (tại P) và các đường thẳng thuộc các cột đồng quy (tại Q). Tính từ hàng dưới cùng, kí hiệu X_i là tứ giác ngoại tiếp thuộc hàng thứ i. Gọi X_k là tứ giác ngoại tiếp ngoài cùng bên phải.

Thực hiện liên tiếp phép dựng tứ giác ngoại tiếp X_{n+1} trên cột có tứ giác X_1, tứ giác X_{n+2} trên cột có tứ giác X_2, ... đến tứ giác ngoại tiếp X_{n+k-1} như hình vẽ.

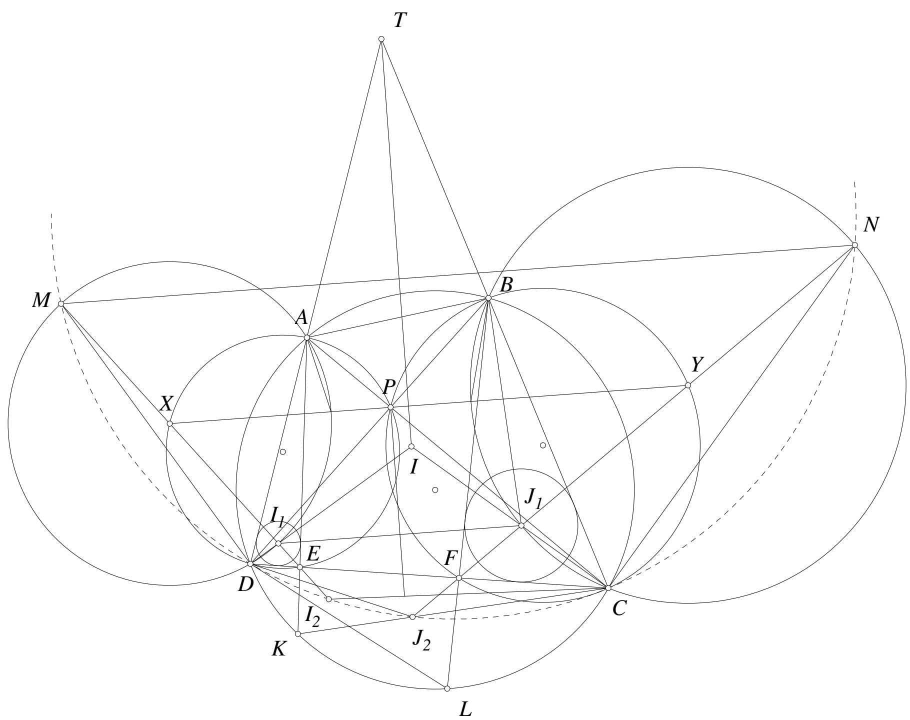
Khi đó ta có một bảng $n \cdot n$ chứa n tứ giác ngoại tiếp $X_k, X_{k+1}, ..., X_{n+k-1}$, với X_k là tứ giác ngoại tiếp nằm ở 1 trong 4 góc. Kí hiệu $\mathcal{C}_k$ là tứ giác bao ngoài bảng trên. Theo trường hợp thứ nhất, tứ giác $\mathcal{C}_k$ ngoại tiếp.

Áp dụng bài toán 6, tứ giác $\mathcal{C}_{k-1}$ chứa các tứ giác ngoại tiếp $X_{k-1}, X_k, ..., X_{n+k-2}$ cũng là một tứ giác ngoại tiếp.

Lại tiếp tục áp dụng bài toán 6 suy ra $\mathcal{C}_{k-2}, ..., \mathcal{C}_1$ là các tứ giác ngoại tiếp. Ta có đpcm. $\square$

Bài 8. *(LevietAn-Nguyễn Văn Linh)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC lần lượt giao CD tại E và F sao cho E, F thuộc đoạn thẳng CD. Gọi I_1, J_1 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, BCF. Chứng minh rằng I_1, J_1, C, D đồng viên.

Chứng minh. (Cách 1-Telv Colh).

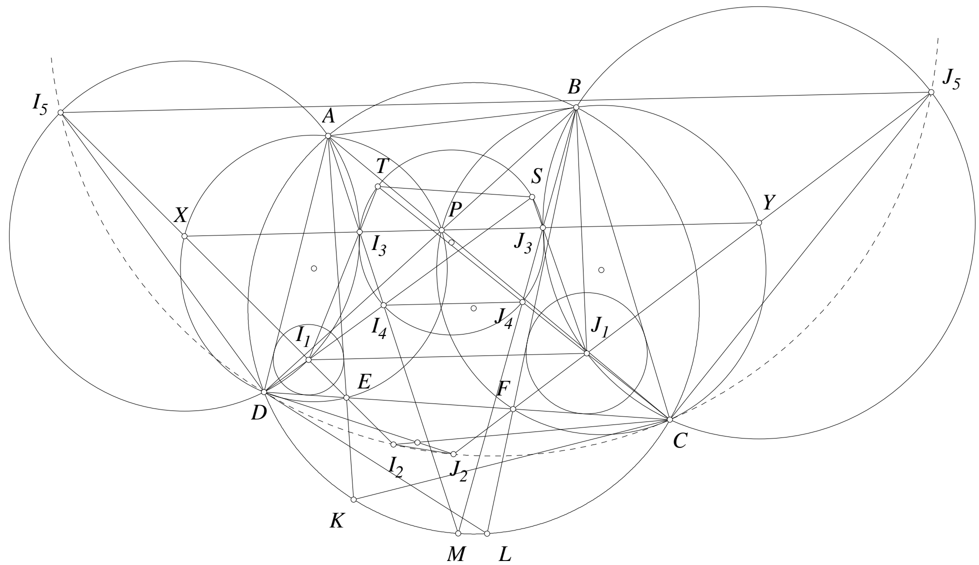


Gọi T là giao của AD và BC. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TCD, (X) và (Y) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC. Ta có X và Y lần lượt là điểm chính giữa cung AD và BC của (APD) và (BPC) nên XY là phân giác $\angle APD$.

Dễ thấy TI song song với phân giác $\angle DPC$ nên $TI \perp XY$. Mà $TA \cdot TD = TB \cdot TC$ nên T nằm trên trục đẳng phương của (X) và (Y). Suy ra TI là trục đẳng phương của (X) và (Y).

Do đó $ID \cdot II_1 = IC \cdot IJ_1$ hay tứ giác DI_1J_1C nội tiếp.

(Cách 2-Luis González).



Gọi I_3, I_4, J_3, J_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APD, ADC, BPC, BDC.

AI_4 giao BJ_4 tại M là trung điểm cung CD của (O). Dễ thấy tứ giác DCJ_4I_4 nội tiếp đường tròn (M, MB) nên $MI_4 = MJ_4$.

Lại có I_3J_3 đi qua P và $\angle PI_3I_4 = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle ADP = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle PJ_3J_4$ nên tam giác MI_3J_3 cân tại M. Ta thu được $I_3J_3J_4I_4$ là hình thang cân.

Mặt khác, dễ thấy tứ giác AI_3I_1D và BJ_3J_1C lần lượt nội tiếp đường tròn có tâm X và Y là trung điểm cung AD và BC của (APD) và (BPC). Gọi T là giao của I_1I_3 và J_1J_4, S là giao của I_1I_4 và J_1J_3.

Ta có $\angle I_1I_3I_4 = \angle ADI_1 = \angle CDI_1 = \angle I_4J_4T$ nên tứ giác $TI_3I_4J_4$ nội tiếp.

Tương tự tứ giác $SJ_3J_4I_4$ nội tiếp. Vậy $S, T \in (I_4J_4J_3I_3)$.

Suy ra $\angle I_1TJ_1 = \angle I_3TJ_4 = \angle J_3SI_4 = \angle J_1SI_1$ hay tứ giác TSJ_1I_1 nội tiếp.

Do các tứ giác TSJ_4I_4 và DCJ_4I_4 nội tiếp nên áp dụng định lý Reim, $TS \parallel DC$. Lại có TSJ_1I_1 nội tiếp nên áp dụng định lý Reim ta có DCJ_1I_1 nội tiếp và $I_1J_1 \parallel I_4J_4 \parallel I_3J_3$. □

Bài 9. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC lần lượt giao CD tại E và F sao cho E, F thuộc đoạn thẳng CD. AE, BF giao (O) lần lượt tại K, L. Gọi I_1, I_2, J_1, J_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, CEK, BCF, DFL. Chứng minh rằng I_1, I_2, J_1, J_2 đồng viên.

Chứng minh. (xem hình bài 1)

Từ tứ giác DI_1J_1C nội tiếp ta thu được $\angle EI_1J_1 = \angle DI_1J_1 - \angle DI_1E = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BCD - (90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle DAE) = \dfrac{1}{2}\angle DAB - \dfrac{1}{2}\angle DAE = \angle EAP = \angle EXP$. Do đó $I_1J_1 \parallel XY$.

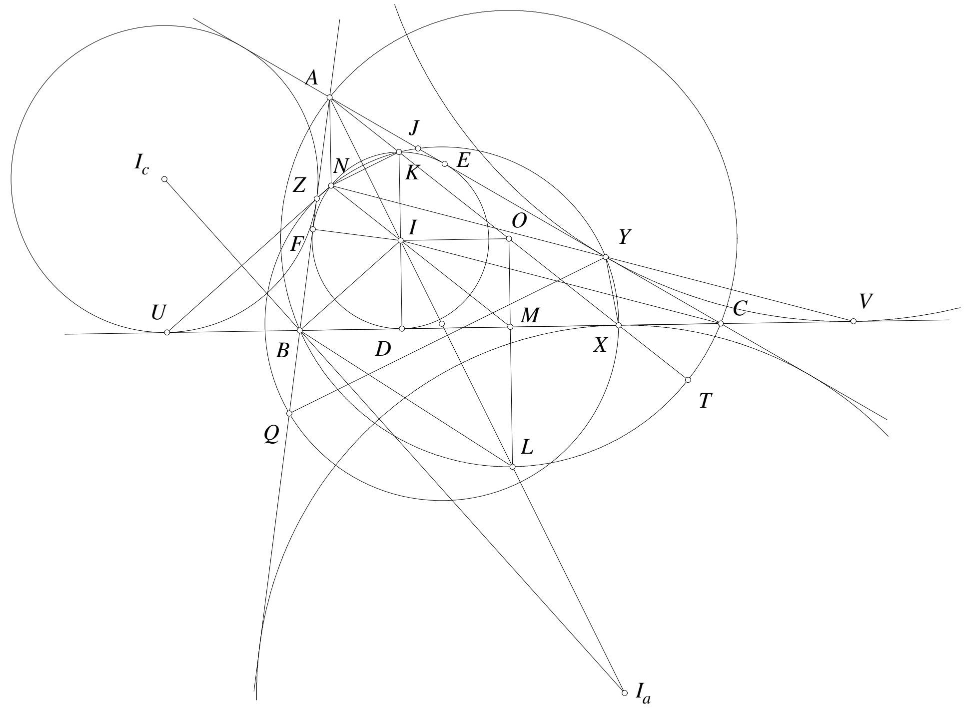
Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng với I_1 qua X, J_1 qua Y suy ra $MN \parallel XY \parallel I_1J_1$.

Suy ra $\angle MNC = \angle MNJ_1 + \angle J_1NC = \angle I_1J_1F + \angle J_1BC = \angle I_1J_1F + \angle FJ_1C - 90^\circ = \angle I_1J_1C - 90^\circ = 270^\circ - \angle I_1DC = 180^\circ - (90^\circ + \angle I_1DC) = 180^\circ - \angle MDC$. Do đó tứ giác $MNCD$ nội tiếp.

Ta có $\angle MI_2C = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle EKC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle ADC = \angle MDC$ nên $I_2 \in (MNCD)$, tương tự với J_2.

Suy ra tứ giác MNJ_2I_2 nội tiếp. Mà $I_1J_1 \parallel MN$ nên theo định lý Reim, tứ giác $I_1J_1J_2I_2$ nội tiếp. □

Bài 10. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường tròn $(I_a), (I_b), (I_c)$ bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. Giả sử $OI \parallel BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ nằm trên phân giác $\angle BAC$.



Chứng minh. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB; K đối xứng với D qua I, M là trung điểm BC.

Do AK đi qua X và M là trung điểm DX nên $IM \parallel AK$. Mà $IO \parallel BC$ nên $OM = ID$, suy ra $OM \parallel= IK$ hay $IKOM$ là hình bình hành. Suy ra $OK \parallel IM$. Ta thu được A, K, O, X thẳng hàng.

Qua A kẻ đường vuông góc với BC cắt IM tại N. Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của $(I_c), (I_b)$ với BC. L là điểm chính giữa cung BC không chứa A.

Do $AN \parallel ML$ nên $\dfrac{NI}{MI} = \dfrac{AI}{LI} = \dfrac{AI}{LB}$.

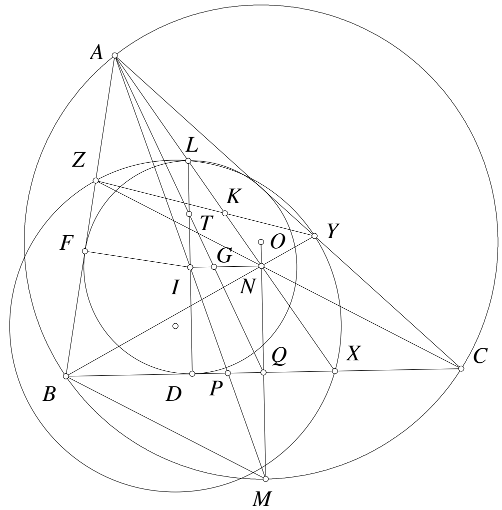
Lại có $\triangle AFI \sim \triangle BML$ nên $\dfrac{AI}{LB} = \dfrac{AF}{BM} = \dfrac{BZ}{BM} = \dfrac{BU}{BM}$. Suy ra $\dfrac{NI}{MI} = \dfrac{BU}{BM}$ hay $BI \parallel UN$. Mà $BI \parallel UZ$ nên UZ đi qua N. Tương tự VY đi qua N.

Gọi J, Q lần lượt đối xứng với Z, Y qua phân giác AI. Ta có $\angle ZNY = \angle BIC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle BAC$, $\angle ZQY = \angle AQY = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC$ nên $\angle ZNY + \angle ZQY = 180^\circ$, suy ra tứ giác $ZNYQ$ nội tiếp. Suy ra 5 điểm Z, J, Y, Q, N cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AKIN$ là hình bình hành và AN, AO đẳng giác trong $\angle BAC$ nên AI là phân giác $\angle NAK$, suy ra $AKIN$ là hình thoi. Nghĩa là N đối xứng với K qua AI. Suy ra 6 điểm K, J, Y, Q, N, X thuộc một đường tròn.

Kéo dài AX cắt (O) tại T. Ta có O là trung điểm KX nên $AK = XT$.

Suy ra $AK \cdot AX = AX \cdot XT = XB \cdot XC = DB \cdot DC = BF \cdot CE = AZ \cdot AY = AJ \cdot AY$. Suy ra tứ giác $KJYX$ nội tiếp. Vậy $X \in (ZJYQ)$. Mà $ZJYQ$ là hình thang cân có trục đối xứng AI nên tâm của (XYZ) nằm trên AI. □

Bài 11. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. Gọi L là điểm đối xứng với D qua I; X, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C với cạnh BC, CA, AB. Giả sử $\angle AIO = 90^\circ$. Chứng minh rằng X, Y, Z, L cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi M là điểm chính giữa cung BC, G là trọng tâm tam giác ABC, Q là trung điểm BC, P là giao của AI với BC, F là tiếp điểm của (I) với AB.

Do $\angle AIO = 90^\circ$ nên $AI = IM = MB = MC$. Lại có $\angle IAF = \angle MBQ$ nên $\triangle IFA = \triangle MQB(g.c.g)$. Ta thu được $MQ = IF = ID$. Suy ra $PI = PM = \dfrac{1}{2}IM = \dfrac{1}{2}IA$.

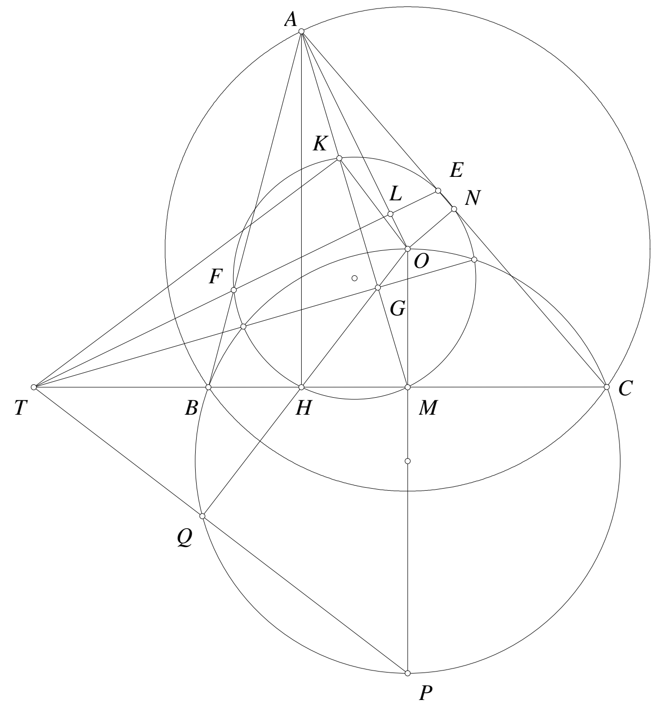
Suy ra $\dfrac{AI}{IP} = \dfrac{AG}{GQ}$ hay $IG \parallel BC$. Gọi N là giao của IG với OM ta thu được $QN = ID = QM$. Gọi T là giao của AQ với ID suy ra IT là đường trung bình của tam giác AMQ, suy ra $IT = \dfrac{1}{2}MQ = \dfrac{1}{2}NQ$. Do đó $\dfrac{IG}{IN} = \dfrac{1}{2}$. Ta thu được N là điểm Nagel của tam giác ABC, tức là AX, BY, CZ đồng quy tại N.

Gọi K là giao của YZ và AX suy ra $(ANKX) = -1$. Mà IL là đường trung bình của tam giác AMN nên $LA = LN$. Áp dụng hệ thức Maclaurin suy ra $KL \cdot KX = KN \cdot KA$.

Mặt khác, do N đối xứng với M qua BC nên $\angle YNZ = \angle BNC = \angle BMC = 180^\circ - \angle BAC$, suy ra tứ giác $AZNY$ nội tiếp. Do đó $KN \cdot KA = KY \cdot KZ$.

Vậy $KY \cdot KZ = KL \cdot KX$ hay tứ giác $LZXY$ nội tiếp. □

Bài 12. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường cao AH. M là trung điểm BC. AM giao OH tại G. Chứng minh rằng G nằm trên trục đẳng phương của (BOC) và đường tròn Euler của tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi P, Q lần lượt là giao của OM, OH với (BOC); E, F là chân đường cao kẻ từ B, C. Gọi (E_u) là đường tròn Euler của tam giác ABC, d là trục đẳng phương của (E_u) và (BOC).

Xét 3 đường tròn $(BOC), (E_u), (BC)$ có EF, BC, d là các trục đẳng phương nên EF, BC, d đồng quy tại T.

Ta có OP là đường kính của (BOC) nên $\angle HQP = 90°$. Xét 3 đường tròn $(HMPQ), (BOC), (E_u)$ có PQ, HM, d là các trục đẳng phương nên PQ đi qua T.

Gọi K là giao điểm thứ hai của AM với (E_u), N là trung điểm BC. Ta có AO vuông góc với EF tại L, suy ra tứ giác $LONE$ nội tiếp.

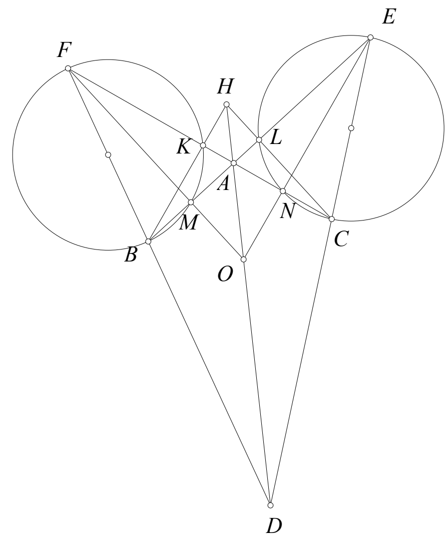
Suy ra $AL \cdot AO = AE \cdot AN = AK \cdot AM$ hay tứ giác $KMOL$ nội tiếp. Mà các điểm L, M, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính OT nên tứ giác $KOMQ$ nội tiếp. Vậy $GK \cdot GM = GO \cdot GQ$ hay G thuộc trục đẳng phương của (BOC) và (E_u). □

Bài 13. Cho tam giác ABC không cân có l là phân giác góc A. Chứng minh rằng l song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC khi và chỉ khi $\angle BAC = 120°$.

Chứng minh.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi D là điểm thỏa mãn $\angle DBA = \angle BAC = \angle DCA$. Khi đó D nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Cách 1.



Gọi E là giao của AB và CD, F là giao của AC và BD. Khi đó hai tam giác FAB và EAC lần lượt cân tại F và E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra FM giao EN tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC.

Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của B trên AC, C trên AB. BK giao CL tại trực tâm H của tam giác ABC.

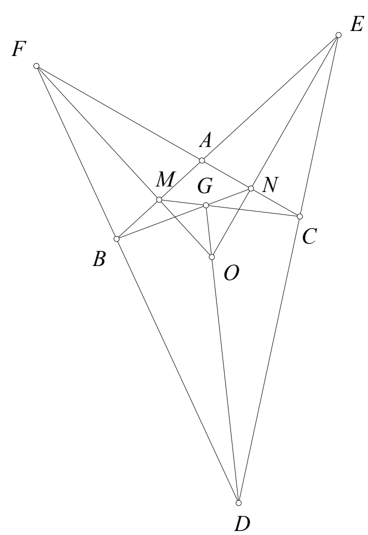
Xét hai đường tròn đường kính BF và CE. Ta có $\overline{HK}\cdot\overline{HB} = \overline{HL}\cdot\overline{HC}$ nên $\mathcal{P}_H/(BF) = \mathcal{P}_H/(CE)$.

Do tứ giác $FMNE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF nên $\overline{OF}\cdot\overline{OM} = \overline{OE}\cdot\overline{ON}$ hay $\mathcal{P}_O/(BF) = \mathcal{P}_O/(CE)$.

Ta có $\angle FBE = \angle FCE$ nên tứ giác $FBCE$ nội tiếp, suy ra $\overline{DB}\cdot\overline{DF} = \overline{DC}\cdot\overline{DE}$ hay $\mathcal{P}_D/(BF) = \mathcal{P}_D/(CE)$.

Vậy H, O, D cùng nằm trên trục đẳng phương của (CE) và (BF) hay D nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

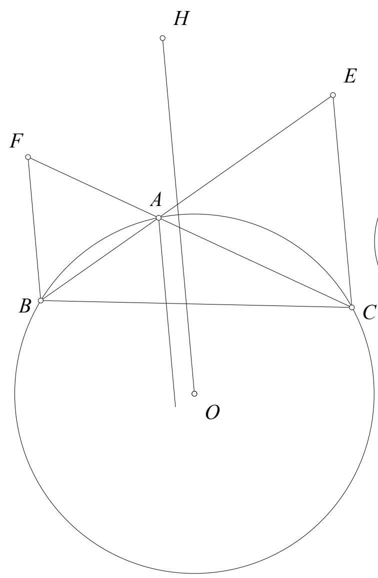
Cách 2.

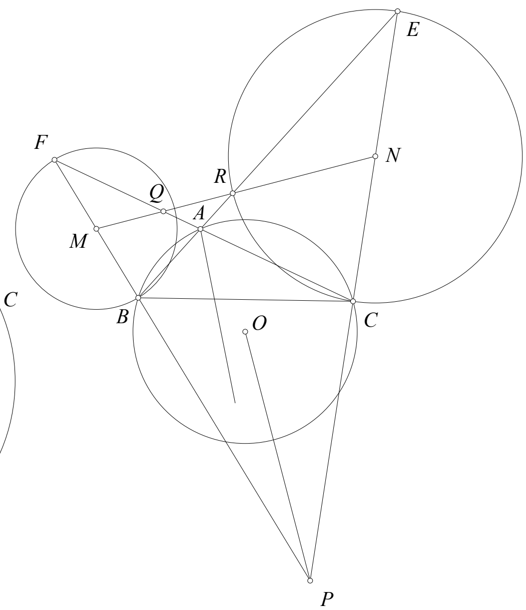


Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm AB, AC.
Do $\angle A = \angle B = \angle C$ nên hai tam giác ABF và ACE lần lượt cân tại F, E.
Suy ra FM giao EN tại O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì BN giao CM tại G.

Áp dụng định lý Pappus cho hai bộ ba điểm (E, M, B) và (F, N, C) ta có giao điểm của các cặp đường thẳng FB và EC, FM và EN, BN và CM lần lượt là D, O, G thẳng hàng hay D nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Trở lại bài toán.





- Nếu $\angle BAC = 120°$. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác đều ABF và ACE. Khi đó $d \parallel BF \parallel EC$. Theo cách chứng minh bổ đề 1, ta biết rằng BF giao CE tại một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Do đó các đường thẳng l, BF, CE và đường thẳng Euler của tam giác ABC đôi một song song.

- Nếu l song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

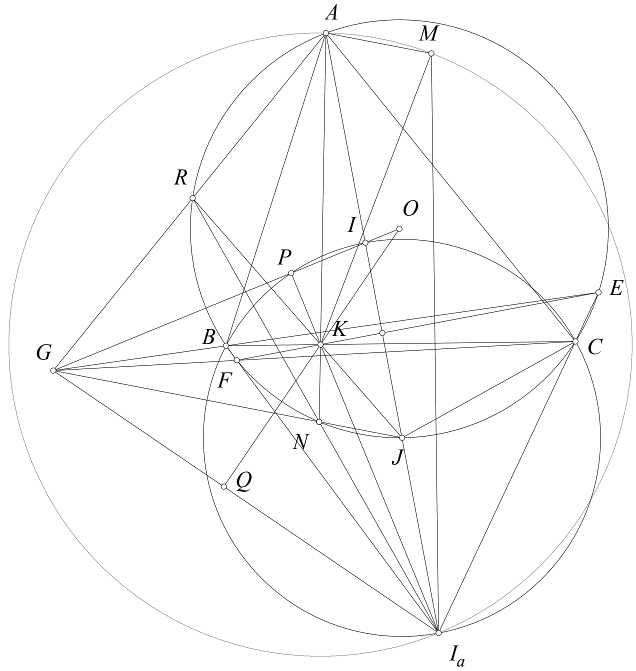
Gọi E, F lần lượt là giao của đường trung trực AB với AC, đường trung trực AC với AB. Giả sử BF và CE không song song. Khi đó BF giao CE tại P. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BF, CE. MN giao AC, AB lần lượt tại Q, R.

Dễ thấy OP là trục đẳng phương của các đường tròn $(M, \dfrac{BF}{2})$ và $(N, \dfrac{CE}{2})$. Do đó $MN \perp OP$. Mà OP là đường thẳng Euler của tam giác ABC nên $l \perp MN$. Suy ra tam giác ARQ cân tại A. Mà hai tam giác FBA và ECA đồng dạng nên $\angle BMQ = \angle CNR$.

Suy ra tam giác PMN cân tại P hay $PM = PN$. Mặt khác P nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(M), (N)$ nên $FB = EC$. Điều này vô lý do hai tam giác FBA và ECA đồng dạng và $AB \neq AC$.

Do đó $BF \parallel EC$. Suy ra $\angle AEC = \angle ABF = \angle EAC = \angle ECA$ hay AEC và AFB là hai tam giác đều. Suy ra $\angle BAC = 120°$. $\square$

Bài 14. Cho tam giác ABC. I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi M là điểm đối xứng với I_a qua BC. Chứng minh rằng AM song song với đường thẳng Euler của tam giác I_aBC.



Chứng minh. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cung ACB, ABC của đường tròn (O). Suy ra $E \in CI_a$ và $F \in BI_a$. Gọi G là giao điểm của BE và CF.

Ta có $\angle I_aFC = \angle BAC = 180^\circ - 2\angle BI_aC$ nên $FI_a = FC$ hay $\angle GCI_a = \angle CI_aB$. Chứng minh tương tự suy ra $\angle GCI_a = \angle CI_aB = \angle GBI_a$. Áp dụng bổ đề về tứ giác có 3 góc bằng nhau, G nằm trên đường thẳng Euler của tam giác BCI_a.

Gọi K là giao điểm của EF và BC, J là điểm chính giữa cung BC, AK, JK giao (O) lần thứ hai tại N, R.

Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $BFCE$, ta có O là trực tâm tam giác GKI_a. Lại áp dụng định lý Brocard lần thứ hai cho tứ giác $ARNJ$, suy ra AR giao JN tại G.

Do EF là đường trung trực của AI_a và BC là đường trung trực của I_aM nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_aM.

Ta có $\angle ANG = \angle ACJ = \angle C + \dfrac{1}{2}\angle A$, $\angle NAM = \angle KAM = 90^\circ - \angle AI_aM = 90^\circ - |\angle I_aBC - \angle I_aCB|$.

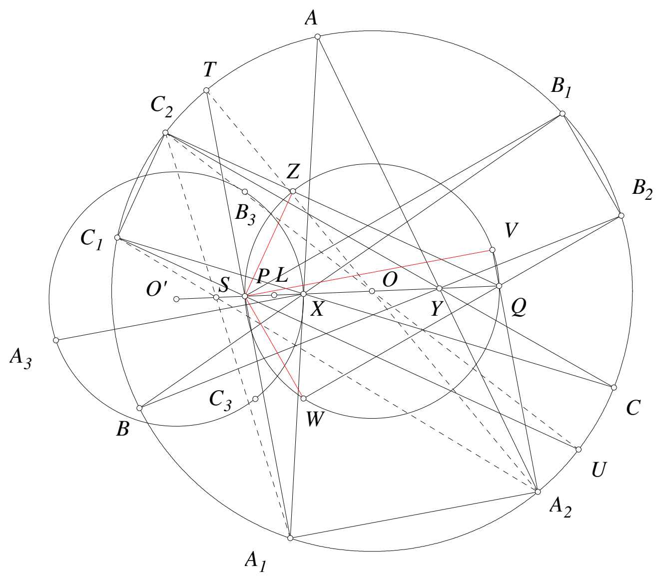
Bằng một số phép tính góc đơn giản ta thu được $\angle ANG = \angle NAM$ hay $AM \parallel GJ$. □

Bài 15. (*Nguyễn Văn Linh*) Cho tam giác ABC. Các đường cao BB_1, CC_1. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của hai tam giác AB_1C_1 và ABC song song khi và chỉ khi $\angle BAC = 60^\circ$.

Bài 16. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung của đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler của một tam giác song song với đường thẳng Euler của tam giác đó khi và chỉ khi có một trong ba góc của tam giác bằng 60°.

Chứng minh. Bài 15, 16 là các ứng dụng của bổ đề 1. Tự giải. □

Bài 17. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. P là điểm bất kì trên OH. AP, BP, CP cắt (O) lần thứ hai lần lượt tại A_2, B_2, C_2. Gọi A_3, B_3, C_3 là các điểm đối xứng với A_2, B_2, C_2 qua A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên OH.



Chứng minh. Ta chứng minh bằng cách mở rộng bài toán như sau.

Mở rộng. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi X, Y là hai điểm bất kì sao cho X, O, Y thẳng hàng. Gọi $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ lần lượt là các tam giác circumcevian của X và Y ứng với tam giác ABC. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là điểm đối xứng của A_2, B_2, C_2 qua trung điểm A_1X, B_1X, C_1X. Khi đó A_3, B_3, C_3, X cùng nằm trên một đường tròn có tâm O' nằm trên XY.

Chứng minh.

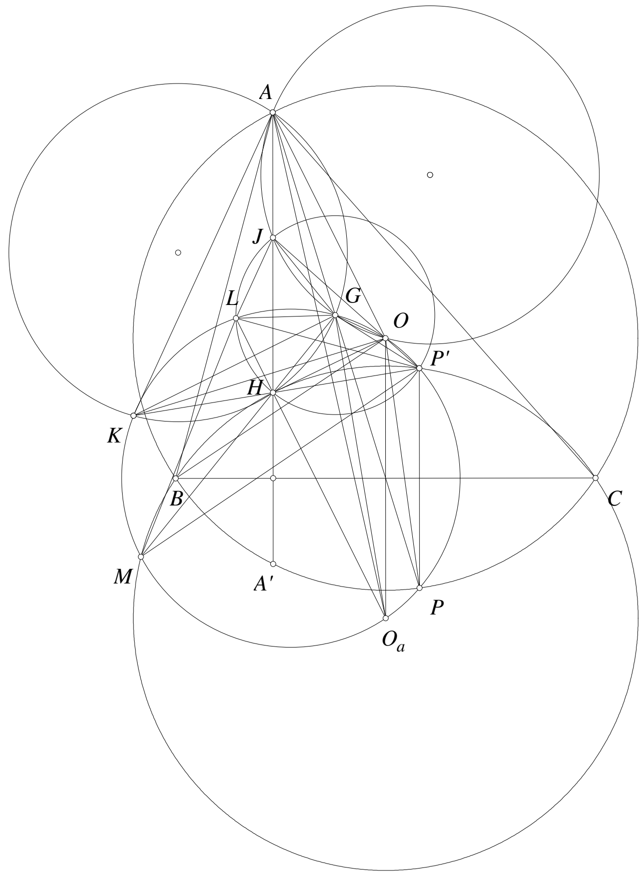
Gọi S là giao điểm của A_1C_2 và A_2C_1. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm C_1, C_2, A_1, A_2, A, C ta thu được $S \in XY$.

Gọi T, U lần lượt là giao điểm thứ hai của đường thẳng qua A_1, C_1 lần lượt vuông góc với A_1A_2, C_1C_2 với (O). A_1T cắt C_1U tại P. Áp dụng định lý Pascal lần thứ hai cho 6 điểm A_1, A_2, C_1, C_2, T, U suy ra $P \in XY$. Tương tự ta thu được đường thẳng qua B_1 vuông góc với B_1B_2 cũng đi qua P, các đường thẳng lần lượt qua A_2, B_2, C_2 và vuông góc với A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại $Q \in XY$.

Dựng các điểm V, W, Z sao cho $\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{PW} = \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{C_1C_2}$. Suy ra $\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_3X}$. Gọi L là trung điểm XP thì V đối xứng với A_3 qua L.

Tương tự suy ra $(A_3B_3C_3)$ là đối xứng của (VWZ) qua L. Mà P, V, W, Z nằm trên đường tròn tâm O đường kính PQ và X đối xứng với P qua L nên X nằm trên $(A_3B_3C_3)$. Hơn nữa, O' đối xứng với O qua L, suy ra $O' \in XY$. $\square$

Bài 18. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trực tâm H. P là điểm bất kì trên cung BC. P' đối xứng với P qua BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OPP' cắt AP tại G. Chứng minh rằng trực tâm tam giác AGO nằm trên HP'.



Chứng minh. Gọi J là giao của OP' với AH. Ta có $\angle JAG = \angle GPP' = \angle GOJ$ nên tứ giác $AJGO$ nội tiếp. (AGH) giao HP' lần thứ hai tại K suy ra G là điểm Miquel của tam giác JHP ứng với bộ 3 điểm (A, O, K). Ta thu được tứ giác $KGOP'$ nội tiếp.

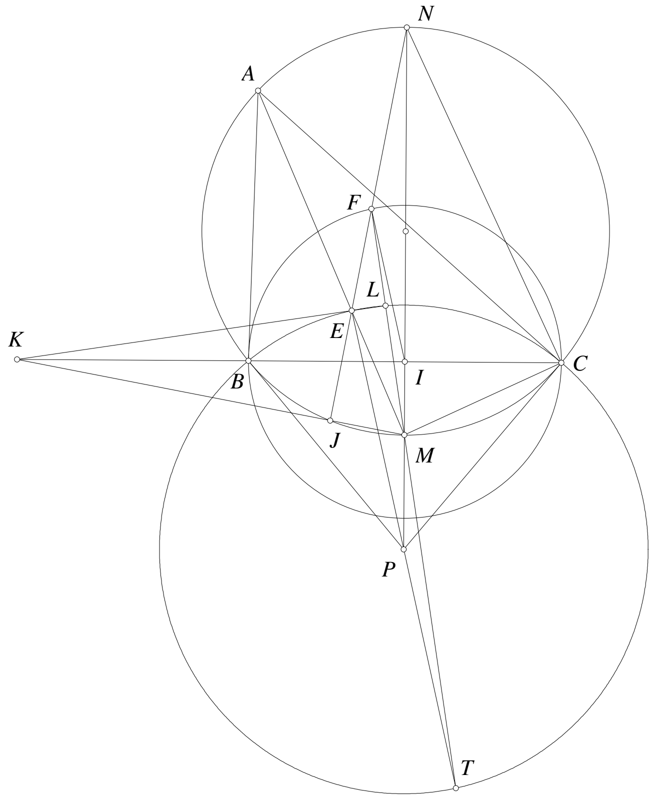
Gọi O_a là tâm ngoại tiếp của tam giác BHC, GH giao (O_a) lần thứ hai tại M. Gọi A' là giao điểm của AH với (O). Do hai đường tròn (O) và (O_a) đối xứng nhau qua BC nên $A'P = HP'$. Ta có $\angle GMP' = \angle HMP' = \angle HAP = \angle HKG$ nên $M \in (OPP')$.

Gọi L là giao của O_aH với (OPP'). Do $O_aH = O_aM = O_aP'$, ta thu được H là tâm nội tiếp của tam giác LMP'. Suy ra $GL = GH = GP'$.

Lại có $\angle HLP' = \angle O_aOP' = \angle HJP'$ nên tứ giác $HLJP'$ nội tiếp đường tròn tâm G. Do hai đường tròn (AGO) và (AGH) cắt nhau tại A và G, đồng thời $\angle AOG = \angle GJH = \angle GHJ$ nên $R(AGO) = R(AGH)$. Mặt khác, $\angle GAO = \angle GPO$ nên $R(AGO) = R(PGO)$.

Vậy 3 đường tròn $(AGO), (AGK), (KGO)$ có bán kính bằng nhau và đồng quy tại G nên K là trực tâm tam giác AGO. $\square$

Bài 19. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Hai tiếp tuyến tại B, C giao nhau tại P. Phân giác góc A cắt (P, PB) tại điểm E nằm trong tam giác ABC. Gọi M, N là điểm chính giữa cung BC và cung BAC. Đường tròn đường kính BC cắt đoạn thẳng EN tại F. Chứng minh rằng trực tâm tam giác EFM nằm trên BC.



Chứng minh. Gọi I là trung điểm BC. Ta có $\angle ICM = \angle MAC = \angle MCP$ nên CM là phân giác $\angle ICP$, suy ra M là tâm vị tự trong của (I) và (P). Do $\angle MCN = 90°$ nên N là tâm vị tự ngoài của (I) và (P).

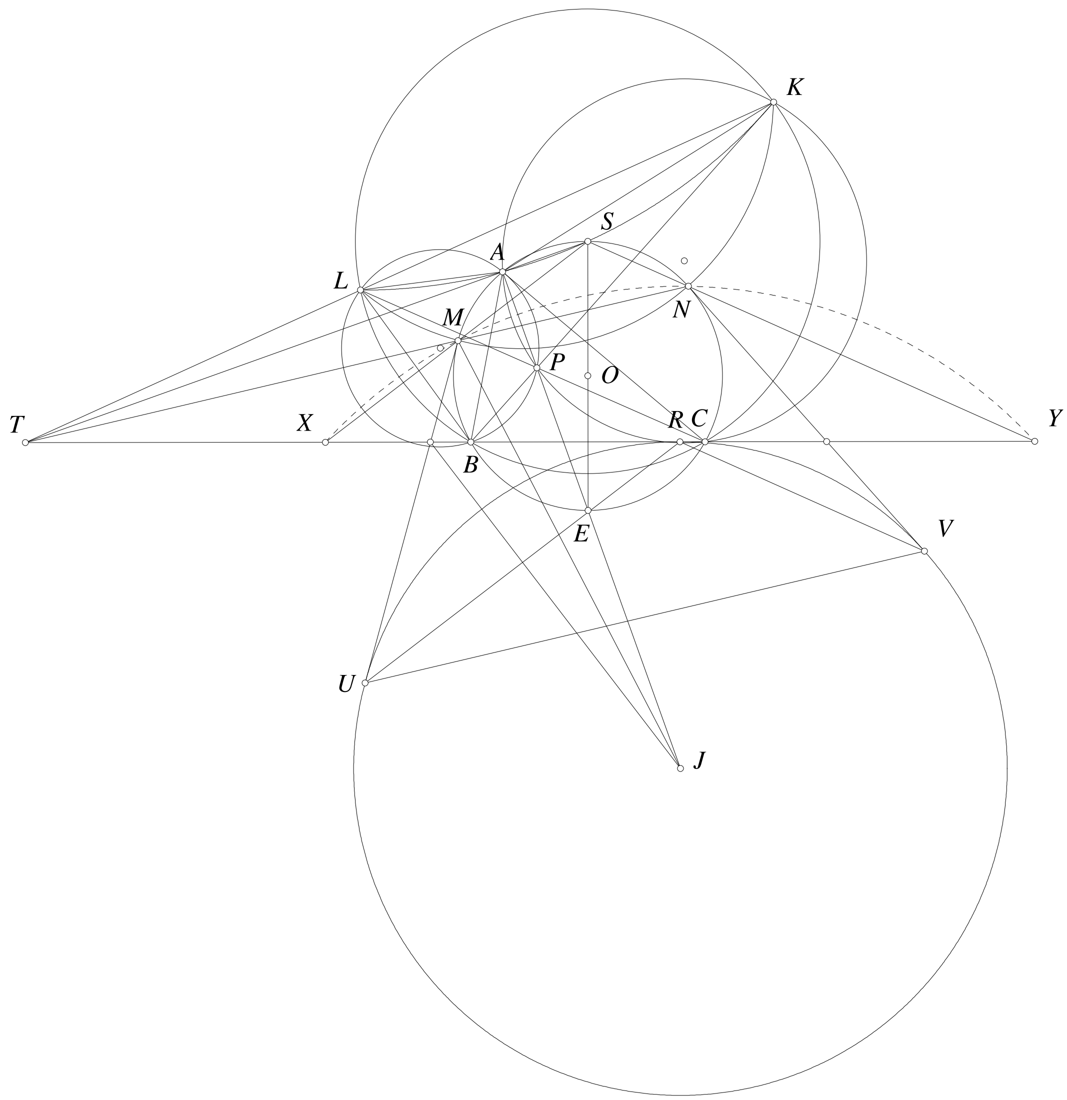
Gọi L, T là giao của FM với (P) (L nằm giữa F và M). Xét phép vị tự $\mathcal{H}_M^{\frac{-PC}{IC}} : F \mapsto T$, suy ra $IF \parallel PT$.

Lại xét phép vị tự $\mathcal{H}_N^{\frac{PC}{IC}} : F \mapsto E$, suy ra $IF \parallel PE$.

Vậy E, P, T thẳng hàng hay ET là đường kính của (P), suy ra $\angle ELP = 90°$.

Gọi J là giao điểm thứ hai của FN với (O). Xét 3 đường tròn $(O), (P), (ELMJ)$ có trục đẳng phương lần lượt là EL, BC, JM nên EL cắt JM tại K nằm trên BC. Vậy trực tâm K của tam giác EFM nằm trên BC. □

Bài 20. *(Nguyễn Văn Linh-mở rộng bài toán của Trần Quang Hùng)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là điểm bất kì nằm trên phân giác góc A. BP giao (APC) lần thứ hai tại K, CP giao (APB) lần thứ hai tại L. J là điểm bất kì nằm trên AP sao cho đường tròn tâm J tiếp xúc với BC không chứa trong (O). Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc với (O) tại M và N. Chứng minh rằng B, C, M, N đồng viên.



Chứng minh. Gọi S là điểm chính giữa cung BAC. Ta có $SB = SC$ và $\angle BSC = \angle BAC = 2\angle PAC = 2\angle BKC = 2\angle BLC$ nên S là tâm ngoại tiếp của tứ giác $BLKC$.

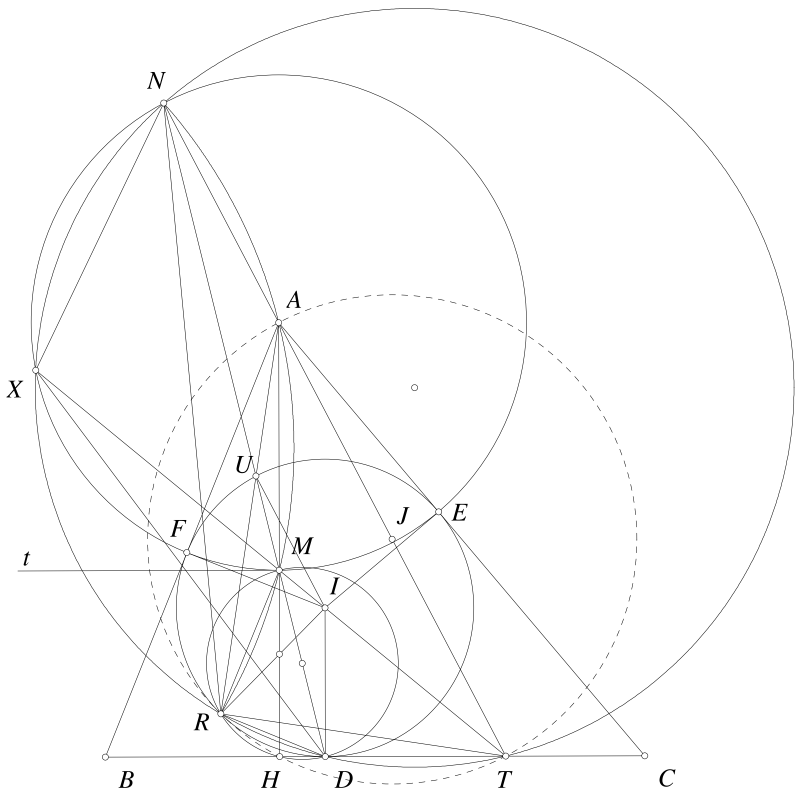
Mặt khác, $\angle LAB = \angle LPB = \angle CPK = \angle CAK$ nên AB, AC đẳng giác trong $\angle LAK$ hay AP là phân giác của $\angle LAK$, suy ra AS là phân giác ngoài $\angle LAK$. Mà $SL = SK$ nên L, A, S, K đồng viên. Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho 3 đường tròn $(LASK), (O), (S)$ suy ra LK, AS, BC đồng quy tại T.

Kéo dài SM, SN giao BC tại X, Y. Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung ngoài với (J), R là tiếp điểm của (J) với BC. Ta có $OS \parallel JR$ suy ra $MS \parallel RU, NS \parallel RV$.

Ta có $\angle SM \cdot SX = SB^2 = SN \cdot SY$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp, suy ra $\angle MXY = \angle MNS = \angle XMU$, suy ra $XMRU$ là hình thang cân có J nằm trên trục đối xứng, suy ra $JM = JX$. Tương tự $JN = JY$, mà $JM = JN$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp đường tròn tâm J. Gọi E là điểm chính giữa cung BC suy ra A là giao của JE với (SMN). Từ đó A là điểm Miquel của tứ giác toàn phần nội tiếp $XMNYST$, suy ra AS, MN, XY đồng quy tại T.

Vậy $TL \cdot TK = TA \cdot TS = TM \cdot TN$ hay tứ giác $LMNK$ nội tiếp. □

Bài 21. *(Jean-Louis Ayme)* Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F. Kẻ $AH \perp BC$. Đường tròn (A, AE) giao đoạn thẳng AH tại M. MI cắt BC tại T. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AT tiếp xúc với (I).



Chứng minh. Gọi X là giao điểm thứ hai của MI với (A). (I) tiếp xúc với BC tại D. DM cắt (A) lần thứ hai tại N.

Kẻ tiếp tuyến Mt của (A) suy ra $Mt \parallel BC$.

Ta có $\angle XNM = \angle XMt = \angle MTD$ suy ra tứ giác $XNTD$ nội tiếp.

Suy ra $\angle DNT = \angle DXT$.

Lại có $IM \cdot IX = IE^2 = ID^2$ nên $\angle DXI = \angle IDM = \angle DMH = \angle AMN = \angle ANM$.

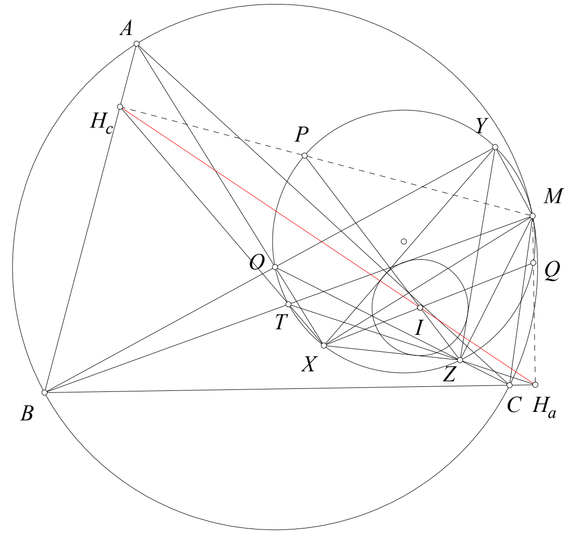
Do đó $\angle ANM = \angle DXT = \angle DNT$, suy ra N, A, T thẳng hàng.

Gọi R là giao điểm của (AMN) với (I) (R nằm trên cung EDF). AR cắt MN tại U.

Ta có $AN = AM$ nên $AU \cdot AR = AM^2 = AF^2$ nên $U \in (I)$. Suy ra $\angle RDH = \angle RUD = \angle RUM = \angle RNA$, suy ra $RDTN$ nội tiếp. Từ đó $\angle RAH = \angle RNM = \angle RTD$, suy ra tứ giác $RATH$ nội tiếp.

Do đó $\angle HRT = \angle HAT = 2\angle ANM = 2\angle DRT$, suy ra RD là phân giác $\angle HRT$. Suy ra (I) tiếp xúc với (AT) tại R. $\square$

Bài 22. *(Mongolia 1996)*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì trên (O). Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của M trên AO, BO, CO. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của M ứng với tam giác ABC đi qua tâm nội tiếp tam giác XYZ.



Chứng minh. Gọi H_a, H_c lần lượt là hình chiếu của M trên BC, AB; P, Q lần lượt là giao của MH_c, MH_a và đường tròn đường kính OM.

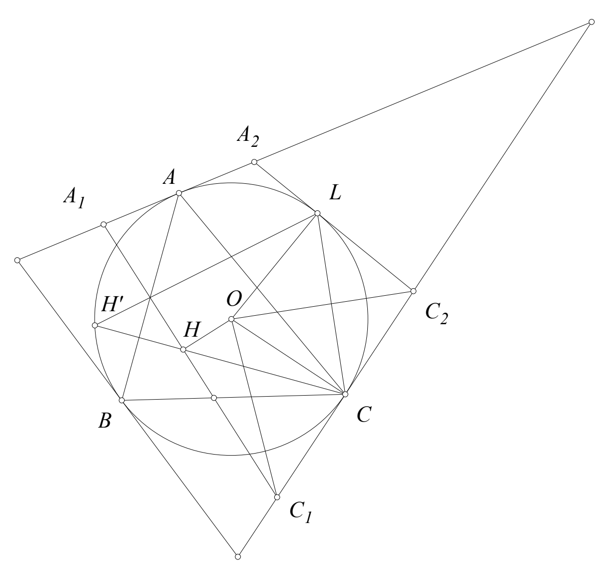
Chú ý rằng X, Y, Z, O, M đồng viên. Do $\angle YMP = \angle ABO = \angle BAO = \angle PMX$ nên P là trung điểm của cung YX. Tương tự, Q là trung điểm của cung YZ.

Gọi T là giao của H_cX và H_aZ. Ta có:

$(TX, TZ) \equiv (TX, H_cM) + (H_cM, H_aM) + (H_aM, TZ) \equiv (AO, AM) + (BA, BC) + (CM, CO)$
$\equiv (BA, BC) + (AO, CO) + (CM, AM) \equiv (BA, BC) + (XO, ZO) + (BC, BA) \equiv (XO, ZO) \pmod{\pi}$

Suy ra $T \in (OM)$. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm P, M, Q, Z, X, T ta thu được H_c, I, H_a thẳng hàng. □

Bài 23. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Kí hiệu l_A, l_B, l_C lần lượt là tiếp tuyến tại A, B, C của (O). Một đường thẳng l qua trực tâm H sao cho $l \perp OH$. $A_1 = l \cap l_A$. A_2 là điểm đối xứng của A_1 qua A, Tương tự xác định được B_2, C_2. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi L là điểm Anti-Steiner của l ứng với tam giác ABC. Kí hiệu H' là điểm đối xứng với H qua AB.

Ta sẽ chứng minh C_2L là tiếp tuyến của (O).

Điều này tương đương $OC_2 \perp LC$

$\Leftrightarrow \angle COC_2 = \dfrac{1}{2}\angle COL = \angle CH'L (1)$

Do C_1HOC là tứ giác nội tiếp nên $\angle COC_2 = \angle C_1OC = \angle C_1HC = \angle H'HA_1 = \angle LH'C$.

Vậy (1) đúng. Tương tự suy ra A_2, B_2, C_2 nằm trên tiếp tuyến kẻ từ L của (O). □

Bài 24. *(Đào Thanh Oai)*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì nằm trên (O) và l là một đường thẳng bất kì qua O. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao của AP, BP, CP với l; A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng và đường thẳng qua A_2, B_2, C_2 chia đôi đoạn nối trực tâm tam giác ABC với P.

Chú ý rằng khi l đi qua P ta thu được đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. Chúng ta phát biểu lại bài toán dưới dạng sau.

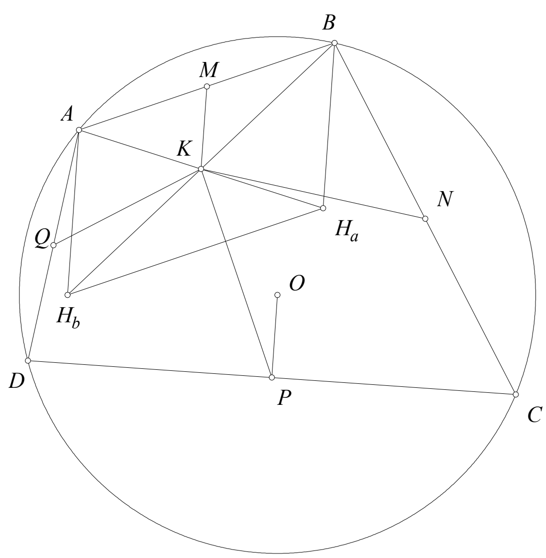
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng l bất kì qua O cắt AB, BC, CD, DA, AC, BD lần lượt tại X, Y, Z, T, U, V. Gọi $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1, V_1$ lần lượt là hình chiếu của X, Y, Z, T, U, V trên CD, AD, AB, BC, BD, AC. Khi đó $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1, V_1$ cùng nằm trên một đường thẳng d.

Ngoài ra, nếu ta gọi H_a, H_b, H_c, H_d lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC thì AH_a, BH_b, CH_c, DH_d đồng quy tại trung điểm K của mỗi đường và d đi qua K.

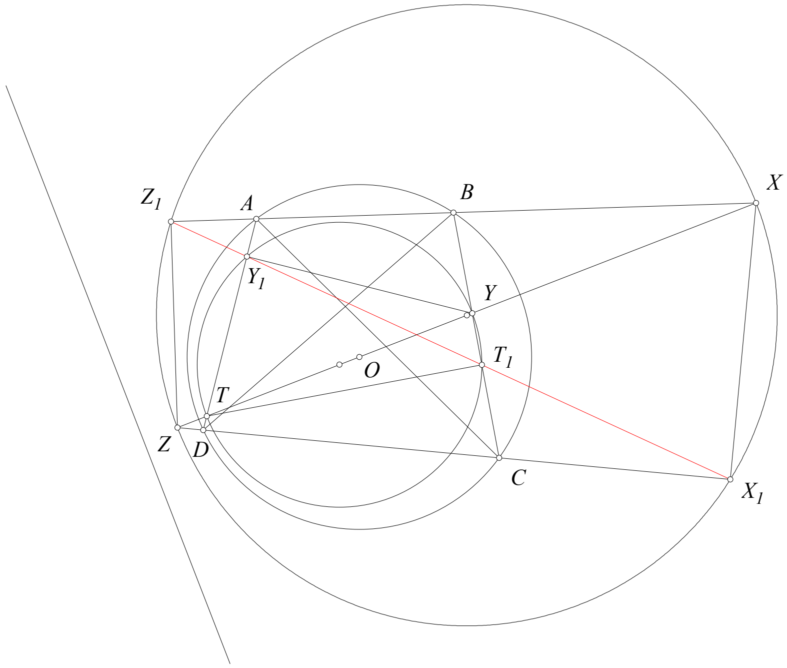
Trước tiên xin phát biểu hai bổ đề.

Bổ đề 2. Quỹ tích các điểm có tỉ số phương tích tới hai đường tròn không đồng tâm cho trước không đổi là một đường tròn đồng trục với hai đường tròn đã cho.

Bổ đề 3. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, d_M, d_N, d_P, d_Q lần lượt là các đường thẳng qua M, N, P, Q và vuông góc với CD, DA, AB, BC. Khi đó AH_a, BH_b, CH_c, DH_d, d_M, d_N, d_P, d_Q đồng quy tại K.



Chứng minh. Dễ thấy $AH_b = 2OP = BH_a$. Mà $AH_b \parallel BH_a$ nên AH_bH_aB là hình bình hành. Điều này nghĩa là AH_a và BH_b có chung trung điểm K. Tương tự AH_a, BH_b, CH_c và DH_d đồng quy tại K. Ngoài ra, MK là đường trung bình của tam giác ABH_a nên $MK \parallel BH_a$ hay $MK \perp CD$. Tương tự ta có thể chứng minh $NK \perp AD$, $PK \perp AB$ and $QK \perp BC$. Bổ đề 3 được chứng minh. □



Thật vậy, gọi Z_1', X_1' lần lượt là giao của Y_1T_1 với AB, CD.

Ta sẽ chứng minh tỉ số phương tích của 4 điểm Z_1', X, X_1', Z đến hai đường tròn (O) và (YT) bằng nhau.

Ta có $\dfrac{\mathcal{P}_{Z_1'}/(O)}{\mathcal{P}_{Z_1'}/(YT)} = \dfrac{\mathcal{P}_X/(O)}{\mathcal{P}_X/(YT)}$ khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{Z_1'A}\cdot\overline{Z_1'B}}{\overline{Z_1'Y_1}\cdot\overline{Z_1'T_1}} = \dfrac{\overline{XA}\cdot\overline{XB}}{\overline{XY}\cdot\overline{XT}}$.

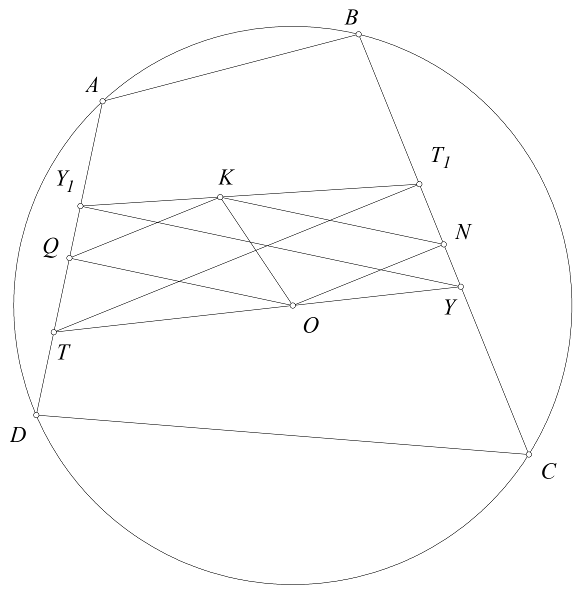
Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác suy ra điều này tương đương:
$\dfrac{\sin\angle Z_1'Y_1A}{\sin\angle Z_1'AY_1}\cdot\dfrac{\sin\angle Z_1'T_1B}{\sin\angle Z_1'BT_1} = \dfrac{\sin\angle XTA}{\sin\angle XAT}\cdot\dfrac{\sin\angle XYB}{\sin\angle XBY}$ (1)

Mà $\angle Z_1'Y_1A = \angle TY_1T_1 = \angle TYT_1 = \angle BYX$, $\angle Z_1'AY_1 + \angle XAT = 180°$, $\angle Z_1'T_1B = \angle ATX$, $\angle Z_1'BT_1 + \angle YBX = 180°$ nên (1) hiển nhiên đúng.

Chứng minh tương tự suy ra $\dfrac{\mathcal{P}_{Z_1'}/(O)}{\mathcal{P}_{Z_1'}/(YT)} = \dfrac{\mathcal{P}_X/(O)}{\mathcal{P}_X/(YT)} = \dfrac{\mathcal{P}_{X_1'}/(O)}{\mathcal{P}_{X_1'}/(YT)} = \dfrac{\mathcal{P}_Z/(O)}{\mathcal{P}_Z/(YT)}$.

Suy ra X, Z, X_1', Z_1' cùng nằm trên đường tròn ω đồng trục với (O) và (YT). Tâm của đường tròn này nằm trên l nên XZ là đường kính của ω. Suy ra $Z_1' \equiv Z_1, X_1' \equiv X_1$.

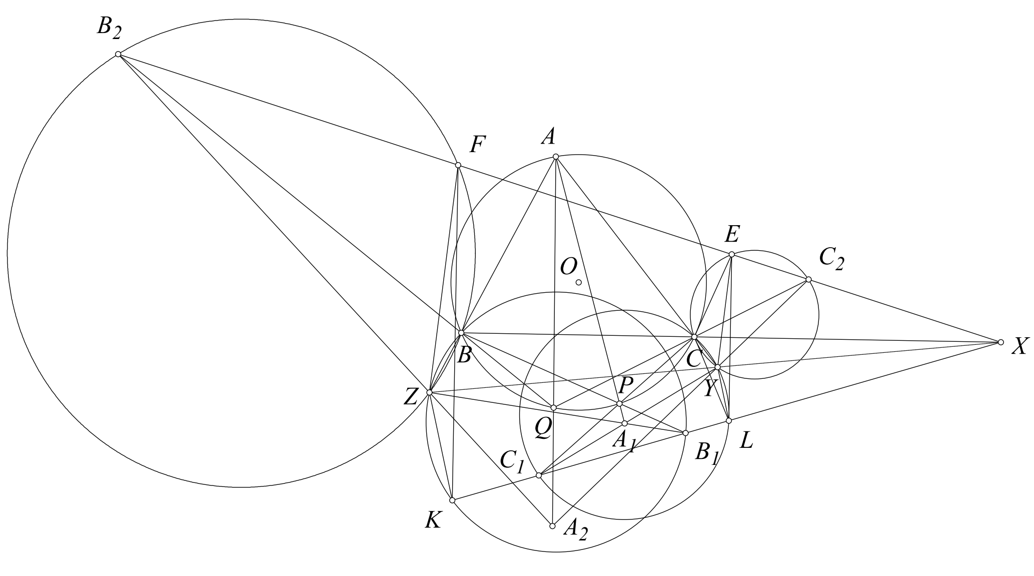
Vậy X_1, Y_1, Z_1, T_1 thẳng hàng. Chứng minh tương tự suy ra 6 điểm $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1, V_1$ thẳng hàng.



Mặt khác, từ bổ đề 3 suy ra QK song song với ON và NK song song với OQ. Suy ra $OQKN$ là hình bình hành.

Từ đó $\dfrac{KN}{Y_1Y} = \dfrac{OQ}{Y_1Y} = \dfrac{OT}{TY} = \dfrac{T_1N}{T_1Y}$. Theo định lý Thales, T_1, K, Y_1 thẳng hàng. Do đó đường thẳng qua 6 điểm $X_1, Y_1, Z_1, T_1, U_1, V_1$ phải đi qua K. Bài toán được chứng minh. □

Bài 25. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là điểm bất kì trên (O). Trên các đường thẳng AP, BP, CP lấy các điểm A_1, B_1, C_1 bất kì. Các đường thẳng đối xứng với B_1C_1 qua BC, C_1A_1 qua CA, A_1B_1 qua AB cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm Q nằm trên (O).



Chứng minh. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của B_1C_1 với BC, C_1A_1 với CA, A_1B_1 với AB. Do AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên theo định lý Desargues, X, Y, Z thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác $ABC, A_2B_2C_2$ suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại Q.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của $(CYC_2), (BZB_2)$ với B_2C_2, L, K lần lượt là giao điểm thứ hai của $(CYC_1), (BZB_1)$ với B_1C_1.

Ta có $\angle CEF = \angle CYC_2 = \angle CYC_1 = \angle CLC_1$. Suy ra E và L đối xứng qua BC.

Tương tự, F và K đối xứng qua BC. Do đó $EL \parallel FK$.

Mặt khác, $\angle YLX = \angle YCC_1 = \angle ABP = \angle ZKL$. Suy ra $YL \parallel ZK$.

Ta có hai tam giác FZK và EYL có 2 cặp cạnh song song và EF, ZY, KL đồng quy tại X nên FZK và EYL vị tự tâm X. Suy ra $FZ \parallel EY$.

Suy ra $\angle ZBQ = \angle ZFE = \angle YEX = \angle YCC_2 = \angle ACQ$. Suy ra $Q \in (O)$. □