Bài toán Protassov và ứng dụng

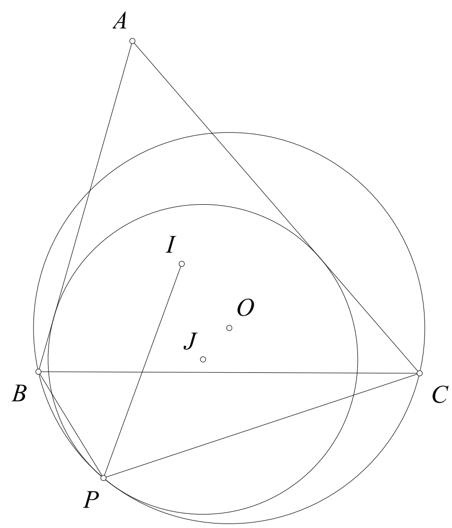
Nguyễn Văn Linh

Năm 2017

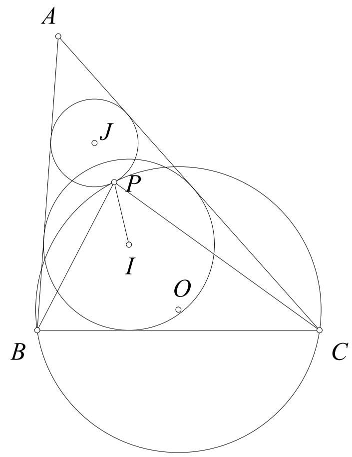
1 Giới thiệu

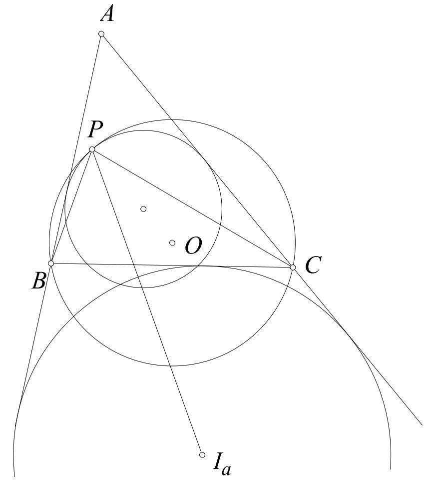
Bài toán Protassov được phát biểu như sau.

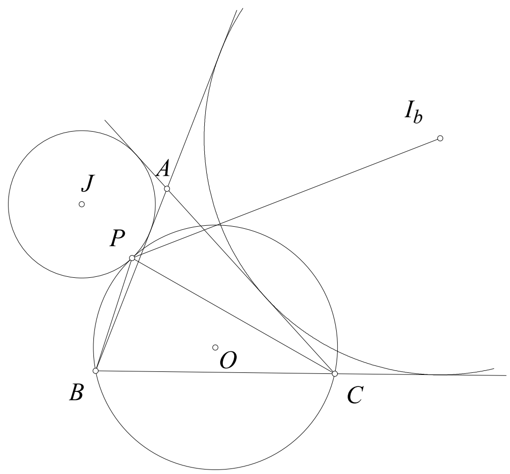
Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (O) bất kì đi qua B và C. Dựng một đường tròn (J) tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại điểm P thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A. Khi đó PI là phân giác của $\angle BPC$.

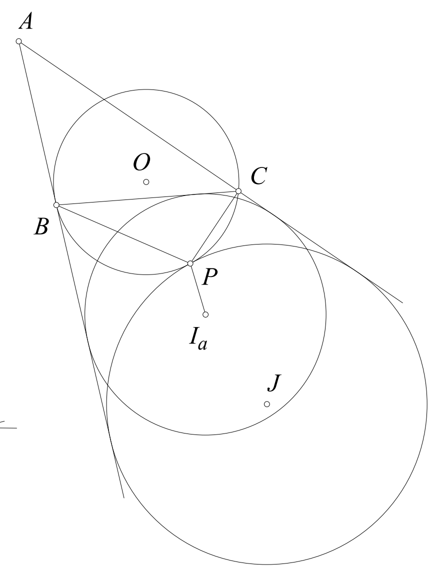


Có thể thấy phát biểu của bài toán trên chỉ là một trong nhiều trường hợp hình vẽ. Một đường tròn có thể tiếp xúc trong hoặc ngoài với (O), tiếp xúc tại một điểm thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa A hoặc không chứa A. Do đó bài toán Protassov còn có thể phát biểu qua một số dạng khác như các hình vẽ dưới đây. Bạn đọc có thể quan sát và phán đoán đề bài.









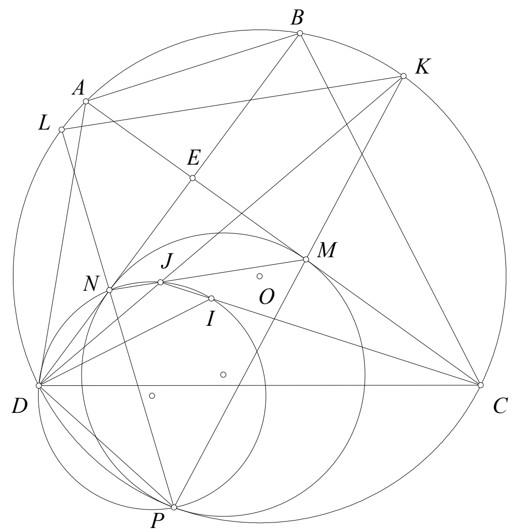
Các hình vẽ luôn thiên biến vạn hóa vì vậy chúng ta không nên có cái nhìn máy móc về bài toán và cho rằng chỉ có một dạng duy nhất.

2 Chứng minh

Cách 1.

Trước tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AC cắt BD tại E. Gọi ω là đường tròn tiếp xúc với tia EC, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong với (O) tại P. I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ECD, ACD. Khi đó P, I, J, N, D cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh.

Gọi K, L lần lượt là giao của PM, PN với (O).

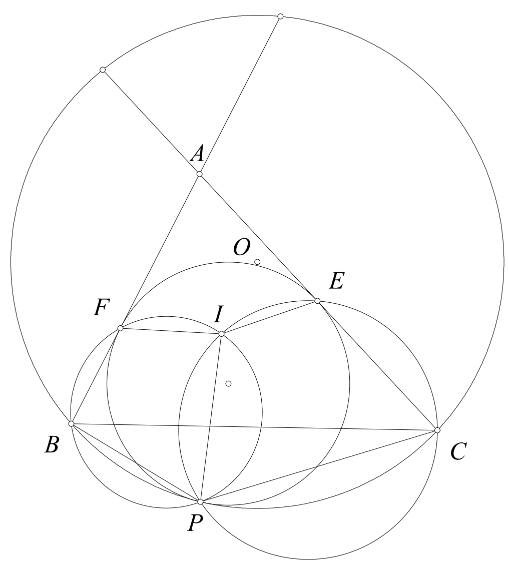
Theo định lý Sawayama-Thebault ta có J nằm trên MN.

Suy ra $\angle ENJ = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle DEC = \angle JID$. Từ đó N, J, I, D cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, P là tâm vị tự ngoài của ω và (O) nên $LK \parallel MN$. Suy ra $\angle NPD = \angle LKD = \angle NJD$ hay N, J, P, D cùng thuộc một đường tròn.

Vậy P, I, J, N, D cùng thuộc một đường tròn.

Trở lại bài toán.



Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (J) với AC, AB.

Theo bổ đề 1 ta có tứ giác $BPIF$ và $CPIE$ đều nội tiếp.

Do đó $\angle BPI = \angle AFI = \angle AEI = \angle CPI$. Vậy PI là phân giác của $\angle BPC$.

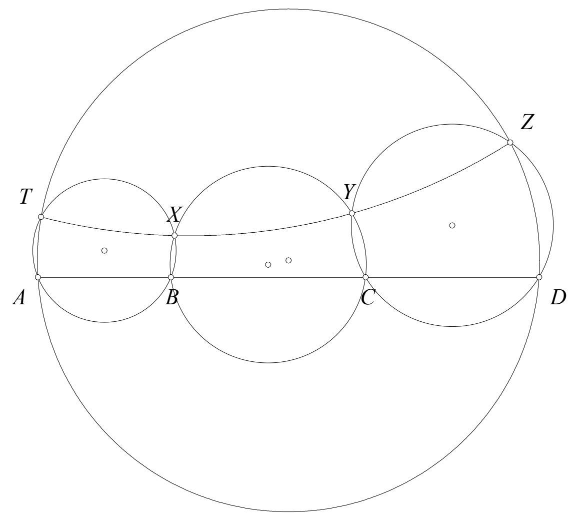
Cách 2- (Jean Louis Ayme) (xem [5]). Ta chứng minh bài toán trong dạng phát biểu thứ hai như sau.

Cho tam giác ABC. D là điểm bất kì nằm trên BC. Dựng một đường tròn (J) tiếp xúc với AB, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn (ADC) tại G. Khi đó phân giác của $\angle AGC$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

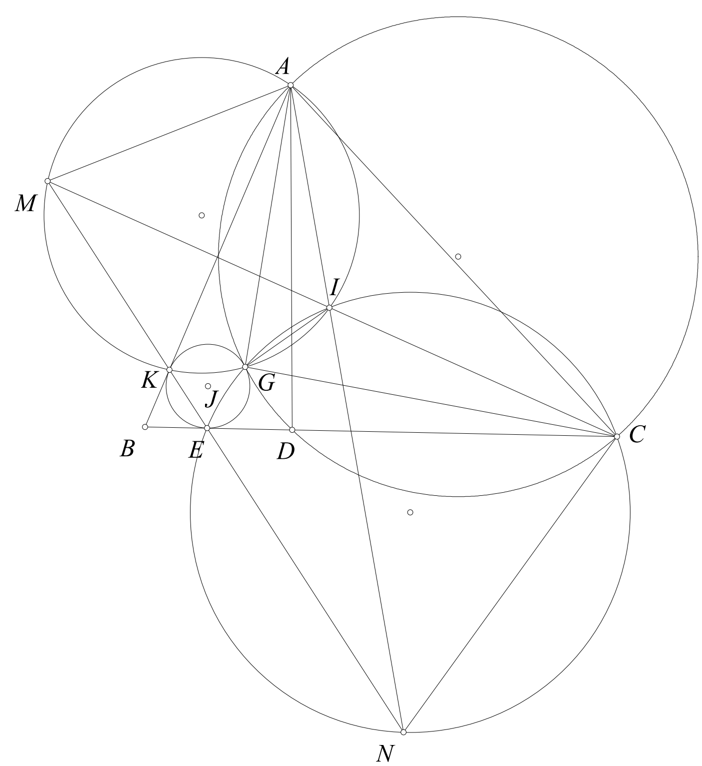
Bổ đề 2. Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Gọi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ lần lượt là đường tròn bất kì qua các cặp điểm $(A, B), (B, C), (C, D), (D, A)$. X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn ω_1 và ω_2, ω_2 và ω_3, ω_3 và ω_4, ω_4 và ω_1. Khi đó X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh.



Bổ đề 2 có thể chứng minh bằng một số phép cộng góc đơn giản hoặc xét phép nghịch đảo cực A phương tích bất kì biến bài toán thành định lý điểm Miquel của tam giác.

Trở lại bài toán.



Gọi K, E lần lượt là tiếp điểm của (J) với AB, BC. (AKG) cắt (CEG) lần thứ hai tại I. AI, CI lần lượt cắt EK tại N, M.

Áp dụng định lý điểm Miquel cho tam giác AKN với bộ 3 điểm K, E, I ta có (AKI) cắt (KKE) tại G nên G là điểm Miquel của tam giác AKN ứng với 3 điểm K, E, I, hay $N \in (CEG)$. Tương tự, $M \in (AKG)$.

Gọi C' là giao của (AMN) và (IEN). Áp dụng bổ đề 2 cho 4 điểm M, K, E, N và 4 đường tròn $(MKI), (J), (NEI), (MAN)$ ta thu được (AGC') tiếp xúc với (O_1). Từ đó suy ra $C' \equiv C$ hay tứ giác A, M, N, C nội tiếp.

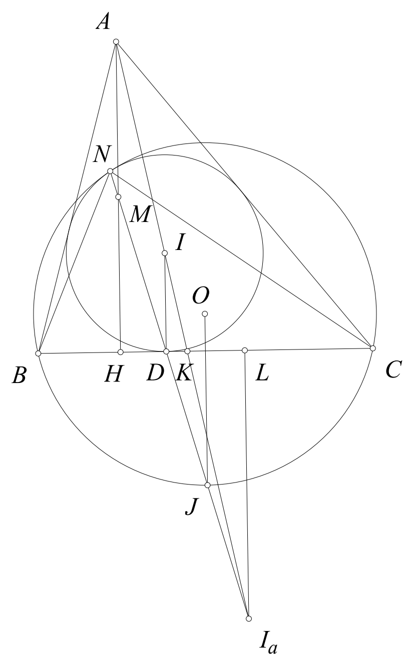
Suy ra $\angle IAB = \angle IMK = \angle IAC$, $\angle ICB = \angle IEN = \angle ICA$ hay I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có $\angle AGI = \angle AMI = \angle CNI = \angle IGC$ hay GI là phân giác $\angle AGC$.

3 Ứng dụng

Sau đây ta xem xét một số ứng dụng của bài toán Protassov cũng như của bổ đề 1.

Bài 1. *(IMO Shortlist 2002).* Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. M là trung điểm của đường cao AH. DM lại cắt (I) tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC tiếp xúc với (I).



Chứng minh. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. AI giao BC tại K. N' là tiếp điểm của đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (I).

Theo bài toán Protassov, $N'I_a$ là phân giác của $\angle BN'C$. Lại có $N'D$ là phân giác của $\angle BN'C$ nên N', D, I_a thẳng hàng.

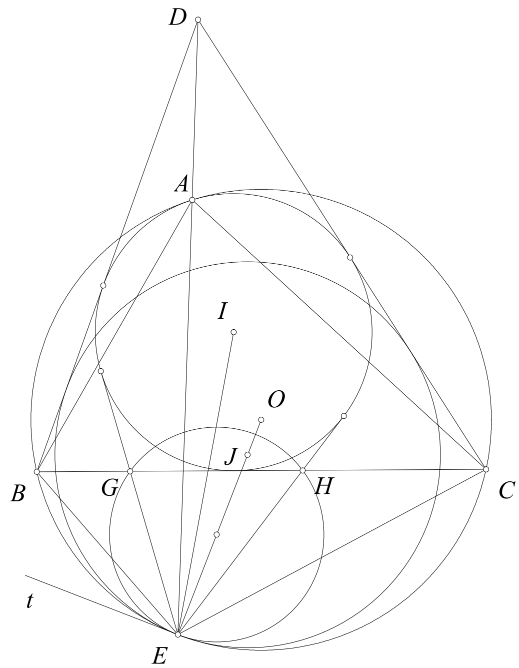
Ta có $(AKII_a) = -1$ nên $D(AKII_a) = -1$. Chiếu lên đường thẳng AH suy ra DI_a đi qua trung điểm AH. Vậy D, I_a, M thẳng hàng. Vậy N' là giao của DM với (I). Suy ra $N' \equiv N$ hay (NBC) tiếp xúc với (I). □

Nhận xét. Bạn đọc có thể nhận thấy trung điểm DI_a cũng nằm trên đường tròn (BNC).

Thật vậy nếu hạ $I_aL \perp BC$ thì trung điểm J của DI_a nằm trên đường trung bình của tam giác DLI_a. Mà D và L đối xứng qua trung điểm BC nên J nằm trên trung trực của BC. Ta có NJ là phân giác $\angle BNC$ nên J nằm trên (BNC).

Đây là một nhận xét quan trọng trong phép chứng minh bài toán 3 trong kỳ thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2017 (xem [6]).

Bài 2. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Dựng đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với BC. Tiếp tuyến khác BC kẻ từ B, C tới (I) cắt nhau tại D. AD cắt (O) lần thứ hai tại E. Từ E kẻ hai tiếp tuyến tới (I), cắt BC tại G, H. Chứng minh rằng (EGH) tiếp xúc với (O).

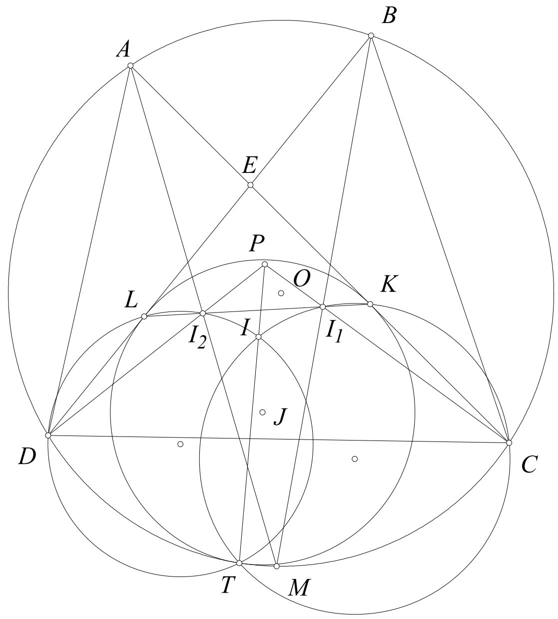


Chứng minh. Gọi (J) là đường tròn tiếp xúc với DB, DC và tiếp xúc trong với (O) tại E' khác A. Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $(O), (I), (J)$ suy ra D, A, E' thẳng hàng. Do đó $E \equiv E'$.

Áp dụng bài toán Protassov ta thu được EI là phân giác của $\angle BEC$. Từ đó EG, EH đẳng giác trong $\angle BEC$.

Kẻ tiếp tuyến Et của (O). Ta có $\angle tEG = \angle tEB + \angle BEG = \angle BCE + \angle HEC = \angle GHE$. Suy ra Et cũng là tiếp tuyến của (EGH). Vậy (EGH) tiếp xúc với (O). □

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Một đường tròn (J) tiếp xúc với tia EC, ED lần lượt tại K, L và tiếp xúc trong với (O) tại T. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ECD, phân giác $\angle ADC$ cắt phân giác $\angle BCD$ tại P. Chứng minh rằng P, I, T thẳng hàng.



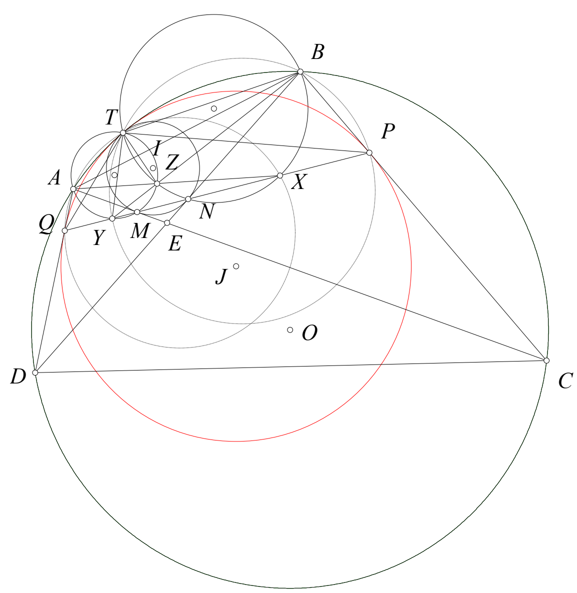
Chứng minh. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD, ACD.

Theo bổ đề 1, D, T, I, I_2, L đồng viên và C, T, I_1, K đồng viên.

Gọi M là giao của AI_2 và BI_1 thì M là điểm chính giữa cung CD. Theo kết quả quen thuộc, $MC = MD = MI_1 = MI_2$. Do đó C, D, I_1, I_2 đồng viên.

Xét trục đẳng phương của ba đường tròn $(DTI), (CTI), (CDI_2I_1)$ ta có DI_2, CI_1, TI đồng quy tại P. □

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, EB và tiếp xúc trong với (O); (J) là đường tròn tiếp xúc với AD, BC và tiếp xúc trong với (O) tại một điểm nằm trên cung AB không chứa C, D. Khi đó $(I), (J), (O)$ có chung một tiếp điểm.



Chứng minh. Gọi T là tiếp điểm của (I) với $(O), X, Y, Z$ lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABC, ABD, ABE. M, N là tiếp điểm của (I) với EA, EB; MN cắt BC, AD lần lượt tại P, Q.

Hiển nhiên các bộ 3 điểm A, Z, X; B, Z, Y thẳng hàng. Theo định lý Sawayama-Thebault, X, Y nằm trên MN.

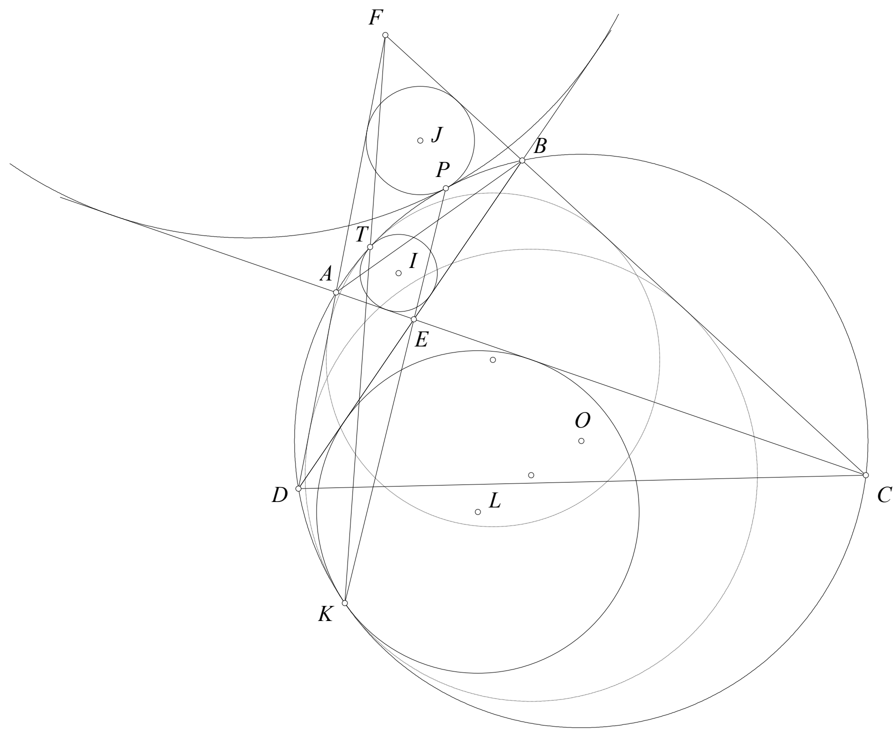
Áp dụng bổ đề 1 suy ra $TZNXB, TZMYA$ nội tiếp.

Suy ra $\angle TYM = \angle TAC = 180^\circ - \angle TBC$. Ta thu được $YTBP$ nội tiếp. Tương tự $TAQX$ nội tiếp.

Từ đó $\angle TPB = \angle TYB = \angle TAX = \angle TQP$ hay BC tiếp xúc với (PQT). Tương tự AD tiếp xúc với (PQT).

Đồng thời $\angle BTP = \angle BYP = \angle MAZ = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BTC$ nên TP là phân giác $\angle BTC$. Suy ra (PTQ) tiếp xúc với (O) tại T. Vậy $(PTQ) \equiv (J)$. Ta có đpcm. □

Bài 5. *(Nguyễn Văn Linh).* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E, AD giao BC tại F. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, EB và tiếp xúc trong với (O). (O_2) là đường tròn tiếp xúc với tia FA, FB và tiếp xúc ngoài với (O) tại một điểm trên cung AB không chứa C, D. Chứng minh rằng giao của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên (O).



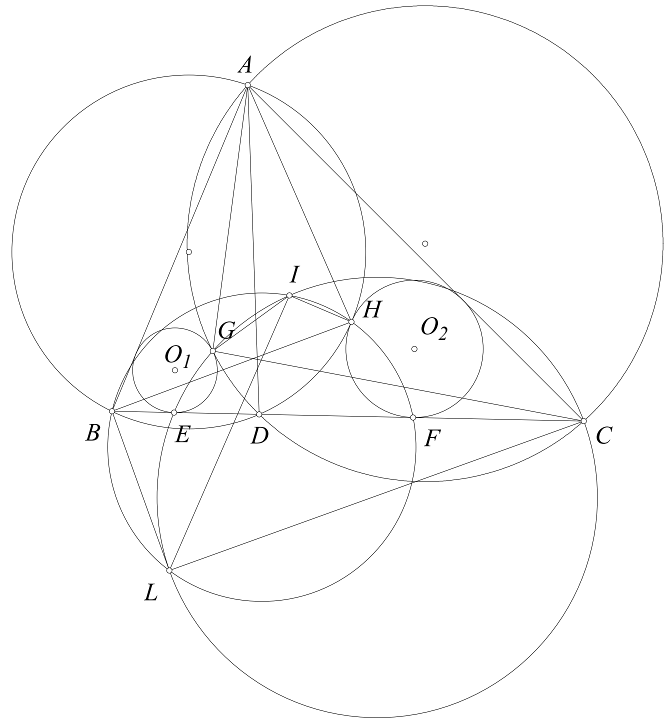
Chứng minh. Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc với tia EC, ED và tiếp xúc trong với (O) tại K. T, P lần lượt là tiếp điểm của $(I), (J)$ với (O).

Theo bài toán 6, tồn tại đường tròn ω_1 và ω_2 tiếp xúc với AD, BC và lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại T, K. Chứng minh tương tự bài toán 6 ta cũng thu được tồn tại đường tròn ω_3 tiếp xúc với AC, BD và tiếp xúc ngoài với (O) tại P.

Áp dụng định lý Monge D'Alembert cho 3 đường tròn $(I), \omega_2, (O)$ suy ra F, T, K thẳng hàng; cho 3 đường tròn $\omega_3, (L), (O)$ suy ra P, E, K thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Monge D'Alembert cho 3 đường tròn $(I), (J), \omega_1$ suy ra tâm vị tự ngoài của (I) và (J) nằm trên TF; cho 3 đường tròn $(I), (J), \omega_3$ suy ra tâm vị tự ngoài của (I) và (J) nằm trên PE. Mà FT giao PE tại K nên K là tâm vị tự ngoài của (I) và (J). Ta có đpcm. □

Bài 6. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC. D là một điểm bất kì trên BC. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AB, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC, (O_2) là đường tròn tiếp xúc với AC, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) với BC, G là tiếp điểm của (O_1) với (ADC), H là tiếp điểm của (O_2) với (ADB). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHF, CGE và đường tròn đường kính BC đồng quy.



Chứng minh. Áp dụng bổ đề 1 và dạng thứ hai của định lý Protassov ta có (CGE) đi qua I và GI là phân giác $\angle AGC$. Tương tự (BHF) đi qua I và HI là phân giác $\angle BHA$.

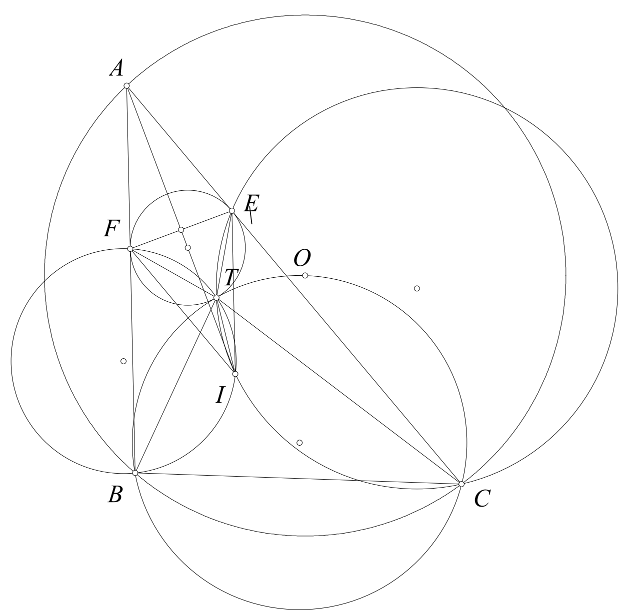
Gọi L là giao điểm thứ hai của (BHF) và (CGE).

Ta có

$$\angle BLC = \angle BLI + \angle CLI = \angle BHI + \angle CGI = \frac{1}{2}(\angle BHA + \angle CGA) = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle ADC) = 90^\circ.$$

Suy ra đpcm. □

Bài 7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại F, E và tiếp xúc ngoài với (BOC). Chứng minh rằng EF chia đôi AI với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



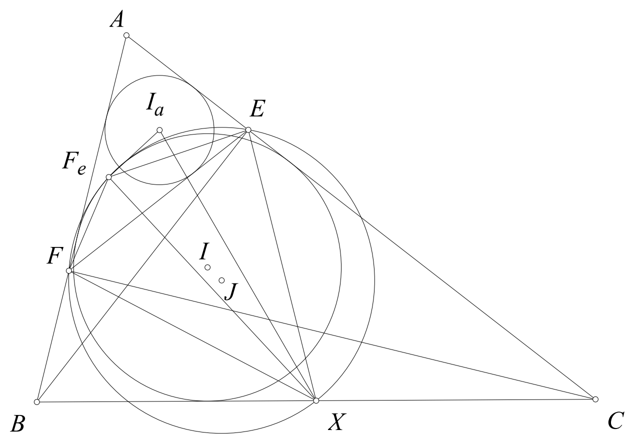
Chứng minh. Gọi T là tiếp điểm của ω với (BOC). Theo bổ đề 1 và bài toán Protassov ta có các tứ giác $ETIB, FTIC$ nội tiếp và TI là phân giác của $\angle BTC$.

Suy ra $\angle BFI = \angle BTI = \dfrac{1}{2}\angle BTC = \dfrac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = 2\angle FAI$.

Suy ra tam giác FAI cân tại F. Ta thu được $FA = FI$. Tương tự $EA = EI$ suy ra EF là trung trực của đoạn thẳng AI. □

Bạn đọc có thể tìm thấy lời giải khác tại [7].

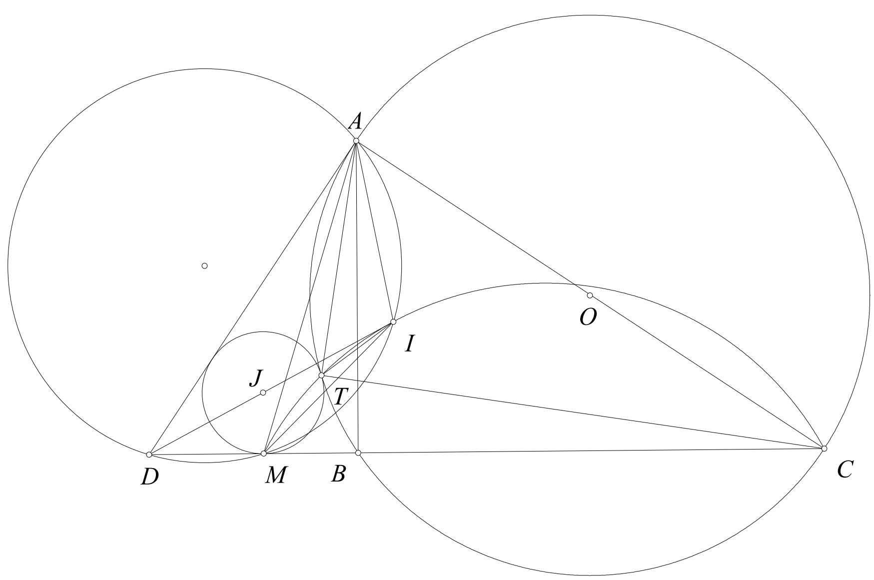
Bài 8. *(Nguyễn Văn Linh)*. Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF. X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDF, CDE. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính I_aX, I_bY, I_cZ đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.



Chứng minh. Ta biết rằng đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn Euler (J) của tam giác ABC tiếp xúc nhau tại điểm Feuerbach F_e. Theo bài toán Protassov, F_eI_a là phân giác của $\angle EF_eF$. Lại có $XE = XF = XB = XC$ nên F_eX cũng là phân giác của $\angle EF_eF$.

Vậy $\angle I_aF_eX = 90^\circ$. Chứng minh tương tự suy ra $(I_aX), (I_bY), (I_cZ)$ đồng quy tại điểm Feuerbach của tam giác ABC. □

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D. Một đường tròn (J) tiếp xúc với đoạn thẳng BD tại M, tiếp xúc với AD và tiếp xúc ngoài với (O). Chứng minh rằng $\angle DAM = \angle MAB$ khi và chỉ khi $AC = CM$.



Chứng minh. Gọi T là tiếp điểm của (J) với (O). I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC.

Theo bổ đề 1 và bài toán Protassov ta có TI là phân giác $\angle ATC$ và M, T, I, C đồng viên.

Khi đó $\angle IMC = \angle ITC = \frac{1}{2}\angle ATC = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Suy ra $\angle DIM = \angle IMC - \angle IDC = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ADC) = \frac{1}{2}\angle DAB$.

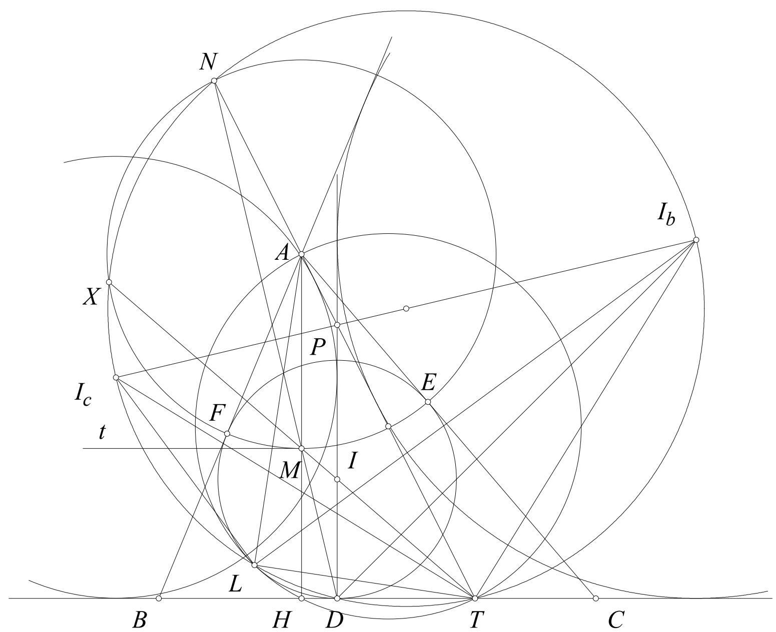
Do đó $\angle DAM = \angle MAB$ khi và chỉ khi $\angle DIM = \angle DAM$ hay tứ giác $AIMD$ nội tiếp.

Điều này tương đương $\angle AMD = \angle AID = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACD$ hay tam giác ACM cân tại C. □

Nhận xét. Có thể thấy điều kiện AM là phân giác $\angle DAB$ còn tương đương tam giác ABC vuông tại B.

Thật vậy, tứ giác $ADMI$ nội tiếp khi và chỉ khi $\angle IMB = \angle DAI$ hay $\frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle BAC) = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BAC)$. Điều này tương đương $\angle ABC = 90^\circ$.

Bài 10. Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường cao AH cắt đường tròn (A, AE) tại điểm M nằm trong tam giác. MI cắt BC tại T. Chứng minh rằng đường tròn đường tròn đường kính AT tiếp xúc với (I).



Chứng minh. Gọi P là giao của DI với AT. X là giao điểm thứ hai của MI với (A). DM cắt (A) lần thứ hai tại N.

Kẻ tiếp tuyến Mt của (A) suy ra $Mt \parallel BC$.

Ta có $\angle XNM = \angle XMt = \angle MTD$ suy ra tứ giác $XNTD$ nội tiếp.

Suy ra $\angle DNT = \angle DXT$.

Lại có $IM \cdot IX = IE^2 = ID^2$ nên $\angle DXI = \angle IDM = \angle DMH = \angle AMN = \angle ANM$.

Do đó $\angle ANM = \angle DXT = \angle DNT$, suy ra N, A, T thẳng hàng.

Do $AN = AM$ và $AM \parallel DP$ nên $PD = PN$. Suy ra $PD - PA = PN - PA = AN = AE = AC - DC = AB - BD$.

Suy ra các tứ giác $ABDP$ và $ACDP$ lần lượt bàng tiếp các đường tròn $(I_b), (I_c)$.

Do đó $\angle I_bTI_c = \angle I_bDI_c = 90^\circ$.

Suy ra tứ giác I_cDTI_b nội tiếp.

Gọi L là tiếp điểm của đường tròn qua A, T với tiếp xúc với (I). Theo bài toán Protassov, tồn tại vị trí của L để LI_b, LI_c là phân giác của $\angle ALT$. Suy ra $\angle I_cLI_b = 90^\circ$, do đó $L, D, T \in (I_bI_c)$.

Ta có $\angle ALI_b = \angle TLI_b = \angle TDI_b = 45°$. Suy ra $\angle ALT = 90°$. Vậy (AT) tiếp xúc với (I) tại L. □

4 Bài tập

Bài 11. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. Một đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (I) tại T. AT cắt (BTC) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng tứ giác $TIDQ$ nội tiếp.

Bài 12. *(Jean Louis Ayme)*. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. Dựng một đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (I) tại T. AT cắt (I) lần thứ hai tại U. Gọi M là điểm chính giữa cung BTC của (BTC). Chứng minh rằng MI vuông góc với DU.

Bài 13. *(Nguyễn Văn Linh)*. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r). (I) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F. Trên các tia EA, FA lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $EP = FQ = r$. Dựng đường tròn (J) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng (J) tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

Bài 14. *(APMC 2016)*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Đường cao AH. M là trung điểm BC, N là trung điểm AH. E là điểm chính giữa cung BAC của (O). MN cắt AE tại P. PI_a cắt đường tròn A-mixtilinear ω tại điểm T thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa A. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BTC tiếp xúc với ω.

Bài 15. *(Nguyễn Văn Linh)*. Cho tam giác nhọn ABC có (E) là đường tròn Euler, I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm AI, BI, CI. Qua E kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB cắt (E) tại các điểm M, N, P sao cho M, N, P nằm trên các nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, CA chứa B và AB chứa C. Chứng minh rằng MX, NY, PZ đồng quy tại điểm Feuerbach của tam giác ABC.

Bài 16. *(Nguyễn Văn Linh)*. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Gọi (J) là đường tròn tiếp xúc với tia PC, PD và tiếp xúc trong với (O) tại X, (K) là đường tròn tiếp xúc với tia PC, PD và tiếp xúc ngoài với (O) tại Y. PX cắt đường tròn nội tiếp tam giác PCD tại Z, PY cắt đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PCD tại T. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PCD với BC. Chứng minh rằng Z, T, E, F nội tiếp một đường tròn có tâm là điểm chính giữa cung CAD của (O).

Bài 17. *(Việt Nam TST 2017)*. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi I_b, I_c lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. P, Q lần lượt là trung điểm I_bE, I_cF. (PAC) cắt AB tại R, (QAB) cắt AC tại S.

a) Chứng minh rằng PR, QS, AI đồng quy.

b) DE, DF lần lượt cắt I_bI_c tại K, J. EJ cắt FK tại M. PE, QF cắt $(PAC), (QAB)$ lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng BY, CX, AM đồng quy.

Bài 18. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC. Dựng một đường tròn (O) qua B và C, (O) cắt AB, AC lần lượt tại E, D. Gọi ω là đường tròn tiếp xúc với các tia AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại X. Y là điểm bất kì nằm trên (O). Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với các cặp đường thẳng EY, BC và DY, BC, đồng thời cùng tiếp xúc trong với (O) sao cho chúng nằm ngoài tam giác YDE. ω_1 giao BC tại N, ω_2 giao BC tại M. Chứng minh rằng X, Y, N, M đồng viên.

Tài liệu

[1] AoPS topic *OMG is it mixtilinear again?!*.
https://artofproblemsolving.com/community/q1h1359250p7445257

[2] AoPS topic *Tangent circles*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h367279

[3] AoPS topic *Tangent circles*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h345684p2666282

[4] AoPS topic *An interestig perpendicularity (own)*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h368888p2031835
item AoPS topic *geometry*.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h296243p1642691

[5] Jean Louis Ayme, *Un remarquable resultat de Vladimir Protassov*, Geometry blog.
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol2.html

[6] Nguyễn Văn Linh, *Lời giải bài toán số 3 trong kì thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2017*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2017/03/25/proof-of-vietnam-tst-2017/

[7] Nguyễn Văn Linh, *Đường tròn mixtilinear*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/11/23/mixtilinear-circles/

Email: *Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com*