

Lời giải bài hình ngày 2 đề thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2017

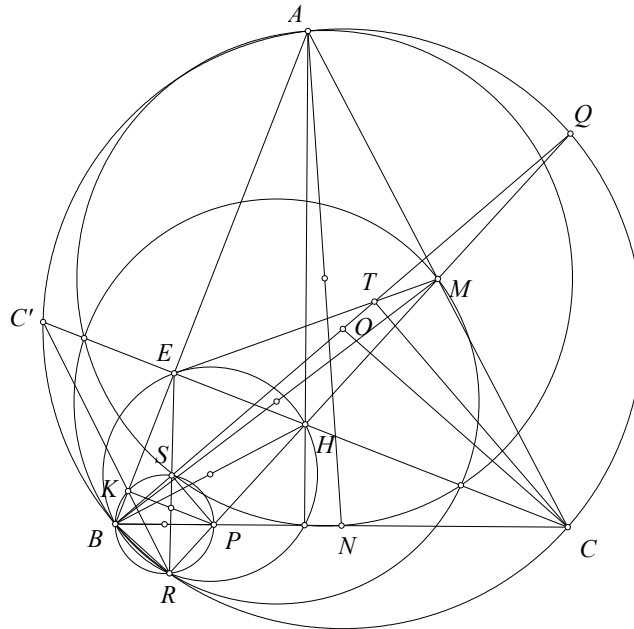
Nguyễn Văn Linh

Ngày 26/03/2017

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . A chuyển động trên (O) sao cho $AB > BC$. M là trung điểm AC . Đường tròn đường kính BM cắt (O) tại R . RM cắt (O) tại Q , cắt BC tại P . Đường tròn đường kính BP cắt AB, BO lần lượt tại K, S .

a) Chứng minh rằng SR đi qua trung điểm KP .

b) N là trung điểm BC . Trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AN, BM cắt SR tại E . Chứng minh rằng ME đi qua một điểm cố định.



Chứng minh. a) Gọi H là trực tâm tam giác ABC suy ra H nằm trên MR . Đường cao CH cắt AB tại E' .

Ta có tứ giác $BE'HR, BKPR$ nội tiếp nên $KP \parallel CH$.

Gọi C' là giao của KR với CH suy ra $\angle C'RB = \angle KPB = \angle C'CB$, ta thu được tứ giác $C'CRB$ nội tiếp. Do đó C' đối xứng với H qua AB .

Mặt khác, $\angle SRP = \angle SBP = \angle ABH = \angle E'RH$. Suy ra S thuộc $E'R$.

Do $KP \parallel C'H$ và E' là trung điểm $C'H$ nên RE' đi qua trung điểm KP .

b) Ta có CH là trục đẳng phương của $(AN), (BM)$ nên E' chính là giao của trục đẳng phương của hai đường tròn với SR . Vậy $E' \equiv E$.

Gọi T là giao điểm của ME với BO .

Ta có $\angle MEC = \angle MCH = \angle OCB = \angle OBC$, suy ra tứ giác $BETC$ nội tiếp. Suy ra $\angle OTC = 90^\circ$ hay T là hình chiếu của C trên BO . Mà B, C, O cố định nên T cố định. \square