Lời giải bài hình ngày 1 đề thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2017

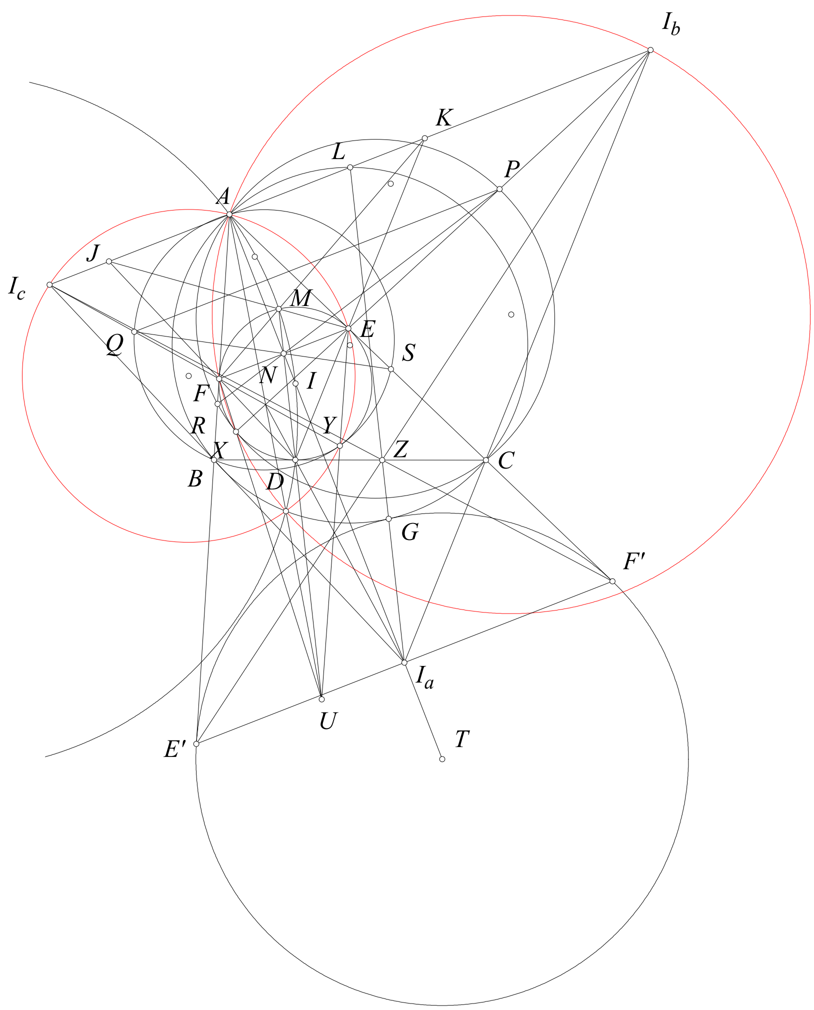
Nguyễn Văn Linh

Ngày 25/03/2017

Bài toán. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi I_b, I_c lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. P, Q lần lượt là trung điểm I_bE, I_cF. (PAC) cắt AB tại R, (QAB) cắt AC tại S.

a) Chứng minh rằng PR, QS, AI đồng quy.

b) DE, DF lần lượt cắt I_bI_c tại K, J. EJ cắt FK tại M. PE, QF cắt $(PAC), (QAB)$ lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng BY, CX, AM đồng quy.



Chứng minh. a) Một phát hiện quan trọng trong ý này là các đường tròn (AQB) và (APC) đều tiếp xúc với (I).

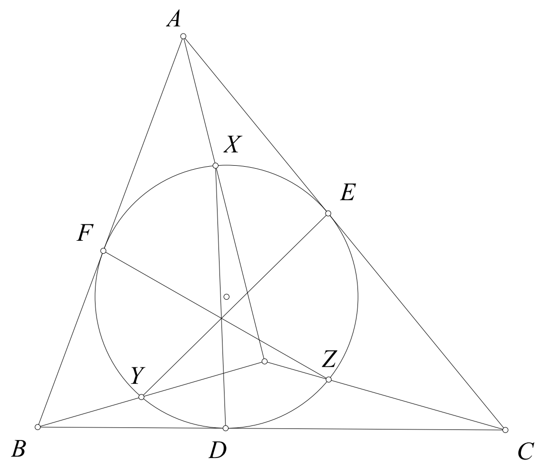
Ta có PQ là đường trung bình của hình thang I_bI_cFE nên PQ cũng là đường trung bình của tam giác AEF. Do đó P,Q thuộc trục đẳng phương của $(A,0)$ và (I). Tương tự Q thuộc trục đẳng phương của $(B,0)$ và (I).

Suy ra $QA^2 = \overline{QF} \cdot \overline{QY} = QB^2$. Do đó (QAB) tiếp xúc với (I) tại Y. Tương tự (PAC) tiếp xúc với (I) tại X.

Khi đó (I) là đường tròn mixtilinear ứng với đỉnh S của tam giác ASB nên tâm nội tiếp tam giác ABS là trung điểm N của EF và do SQ là phân giác $\angle ASB$ nên SQ đi qua N. Tương tự RP cũng đi qua N hay PR, QS, AI đồng quy tại N.

b) Trước tiên ta phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc sau.

Bổ đề. (*Định lý Steinbart*) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Các điểm X, Y, Z bất kì nằm trên (I). Khi đó AX, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi DX, EY, FZ đồng quy.



Trở lại bài toán.

Do I_bI_c là đường đối cực của N ứng với (I) nên JE, KF, DN đồng quy tại M nằm trên (I).

Theo bổ đề trên, các đường thẳng AM, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi FX, EY, DM đồng quy.

Ta có $\angle EYF = \angle AEF = \angle I_bAC$ nên tứ giác I_cAEY nội tiếp. Tương tự tứ giác AI_bXF nội tiếp.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{S}$ là hợp của phép nghịch đảo $\mathcal{I}_A^{AB\cdot AC}$ và phép đối xứng trục $\mathcal{D}_{AI}$.

$\mathcal{S} : (O) \leftrightarrow BC, (I) \leftrightarrow (T)$ với (T) là đường tròn mixtilinear bàng tiếp góc A của tam giác ABC. (T) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E', F' thỏa mãn $E \leftrightarrow E', F \leftrightarrow F'$.

Theo bổ đề Sawayama, tâm bàng tiếp I_a là trung điểm $E'F'$. Áp dụng định lý Pappus cho 2 bộ ba điểm (I_c, A, I_b) và (E', I_a, F') suy ra I_bE' giao I_cF' tại Z nằm trên BC.

Gọi G là tiếp điểm của (T) với (O). Ta biết I_aG đi qua L là điểm chính giữa cung BAC của (O) hay là trung điểm I_bI_c. Mà $I_bI_c \parallel E'F'$ nên theo định lý Thales, L, Z, G, I_a thẳng hàng.

Ta có $\mathcal{S} : E'I_b \leftrightarrow (I_cAE), F'I_c \leftrightarrow (I_bAF), D \leftrightarrow G, I \leftrightarrow I_a$ nên $GI_a \leftrightarrow (AID)$.

Do $E'I_b, F'I_C, I_aG$ đồng quy nên $(AI_cE), (AI_bF), (AID)$ đồng trục. (1)

Ta có $\overline{NM} \cdot \overline{ND} = \overline{NE} \cdot \overline{NF} = \overline{NA} \cdot \overline{NI}$ nên tứ giác $AMID$ nội tiếp.

Xét trục đẳng phương của 3 đường tròn $(I), (I_cAE), (I_bAF)$ ta có EY cắt FX tại U là tâm đẳng phương của 3 đường tròn. Lại xét trục đẳng phương của 3 đường tròn $(I), (I_cAE), (AID)$ ta có MD cắt EY tại U' là tâm đẳng phương của 3 đường tròn. Kết hợp với (1) suy ra $U \equiv U'$. Ta có MD, EY, FX đồng quy tại U. Từ đó có đpcm. $\square$