Về một bài toán Sangaku

Nguyễn Văn Linh

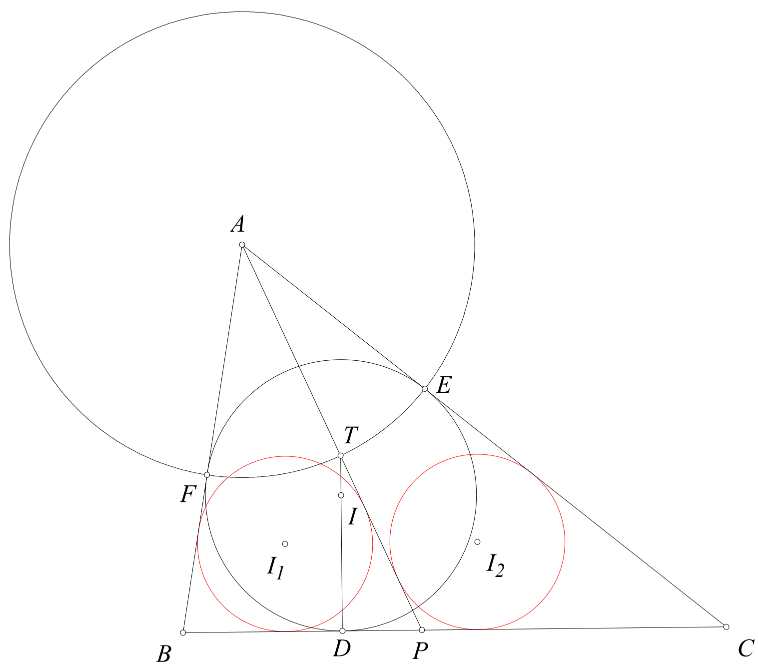
Năm 2017

1 Mở đầu

Sangaku là tên của những bài toán được khắc trên những ngôi đền cổ tại Nhật Bản. Bạn đọc có thể tìm thấy tại [1] hoặc [2].

Trên tạp chí Forum Geometricorum năm 2015, tác giả *Paris Pamfilos* có một bài viết về phép chứng minh một trong những bài toán Sangaku như sau (xem [3]).

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng ID cắt đường tròn (A, AE) tại điểm T nằm trong tam giác ABC. AT cắt BC tại P. Khi đó đường tròn nội tiếp của hai tam giác APB và APC có bán kính bằng nhau.

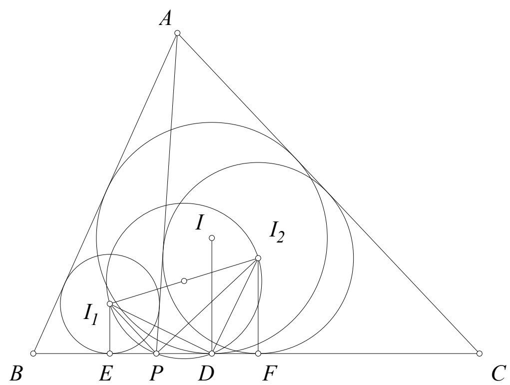


Trong bài viết này, tác giả sẽ chứng minh bài toán trên theo cách khác và đưa ra một số khai thác xung quanh bài toán.

2 Chứng minh bài toán

Trước tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC. P là điểm bất kì trên BC, gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABP, ACP. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Khi đó I_1, I_2, P, D cùng thuộc đường tròn đường kính I_1I_2.

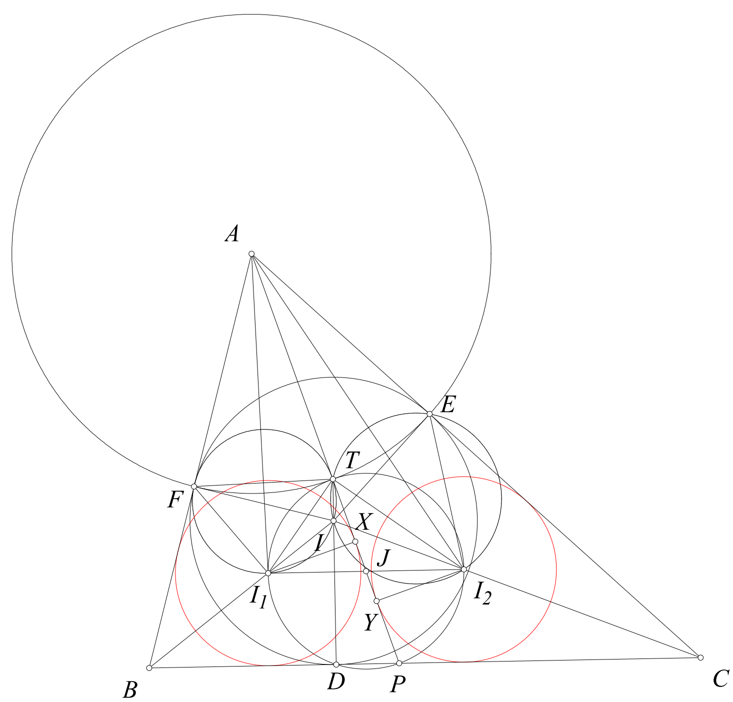


Chứng minh. Gọi E, F là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với BC.

Ta có $EP = \dfrac{AP + BP - AB}{2}, DF = DC - FC = \dfrac{AC + BC - AB}{2} - \dfrac{AC + PC - AP}{2}$. Từ đó dễ dàng suy ra rằng $EP = FD$.

Lại có $\triangle I_1PE \sim \triangle PI_2F$ nên $\triangle DEI_1 \sim \triangle I_2FD$. Suy ra $\angle I_1DI_2 = 90°$. Dễ thấy $\angle I_1PI_2 = 90°$ nên D, P cùng nằm trên đường tròn (I_1I_2).

Trở lại bài toán.



Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác APB, APC.

Giả sử đường tròn (FIT) cắt IB lần thứ hai tại I'_1 khác I. Do IB là phân giác ngoài của $\angle FIT$ nên I'_1 là điểm chính giữa cung FIT của đường tròn (FIT). Từ đó $I'_1T = I'_1F$.

Lại có $AF = AT$ nên AI'_1 là phân giác $\angle BAP$. Suy ra I'_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác APB hay tứ giác $FTII_1$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, tứ giác $ITEI_2$ nội tiếp.

Ta có $\angle TI_1F = \angle TIF = \angle ABC$ nên $\angle FI_1A = \dfrac{\angle ABC}{2}$. Suy ra $\angle BFI_1 = \dfrac{1}{2}(\angle BAP + \angle ABC)$.

Chứng minh tương tự, $\angle CEI_2 = \dfrac{1}{2}(\angle CAP + \angle ACB)$.

Suy ra $\angle I_1TI_2 = \angle I_1TI + \angle I_2TI = \angle I_1FI + \angle I_2EI = 180° - \angle BFI_1 - \angle CEI_2 = \dfrac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) = 90°$.

Vậy T thuộc đường tròn đường kính I_1I_2. Theo bổ đề trên, 5 điểm I_1, T, I_2, P, D cùng nằm trên một đường tròn có tâm J.

Lại có $\angle TDP = 90^\circ$ nên TP cũng là đường kính của đường tròn này hay $J \in TP$.

Kẻ I_1X, I_2Y cùng vuông góc với TP. Ta có $\triangle I_1JX = \triangle I_2JY(g.c.g)$ nên $I_1X = I_2Y$, hay nói cách khác hai đường tròn (I_1) và (I_2) có cùng bán kính.

3 Phát triển

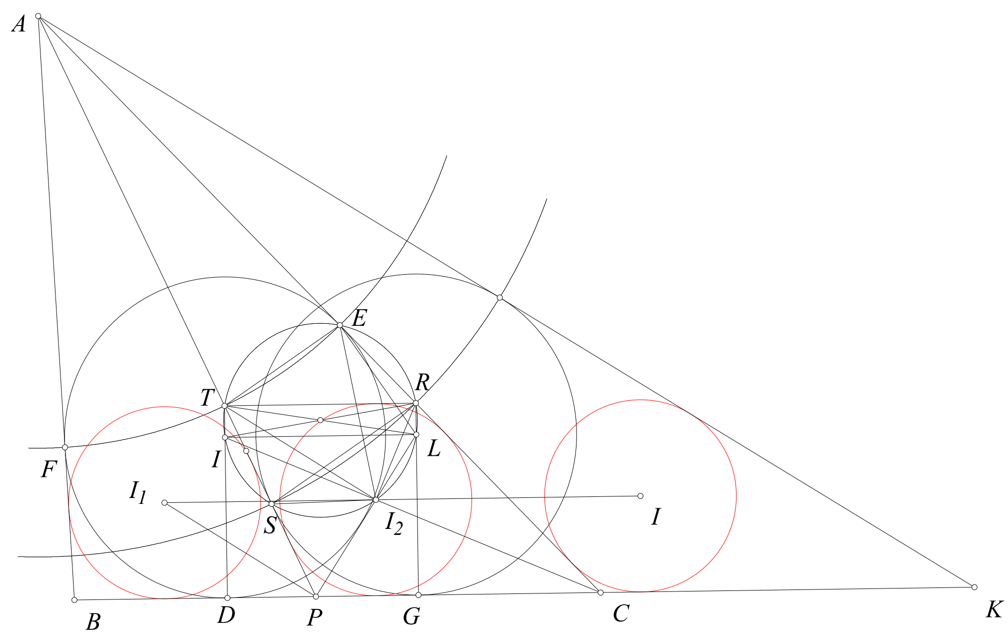
Bây giờ ta sẽ dựng thêm một đường tròn nội tiếp như sau: Dựng đường tròn (I_3) tiếp xúc với CA, tia đối của tia CB và có bán kính bằng bán kính các đường tròn $(I_1), (I_2)$. Từ A kẻ tiếp tuyến AK tới (I_3) $(K \in BC)$.

Gọi (L) là đường tròn nội tiếp tam giác APK. (L) tiếp xúc với PK, AP tại G, S. Theo bài toán trên, $AC, LG, (A, AS)$ đồng quy tại R.

Hơn nữa theo phép chứng minh trên, ta có S, I_2, L, R cùng thuộc một đường tròn, đồng thời $\angle RI_2S = \angle APC$.

Ta có kết quả sau.

Tính chất 1. 7 điểm T, E, R, L, I_2, S, I cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi ω là đường tròn đi qua 4 điểm T, E, I_2, I. Giả sử ω cắt AC, AP lần lượt tại R', S'.

Vì $I_2T = I_2E, AE = AT$ nên $AR' = AS'$ hay tứ giác $TER'S'$ là hình thang cân.

Ta có $\angle TR'E = \angle TI_2E = \angle ACP$ nên $TR' \parallel BC$.

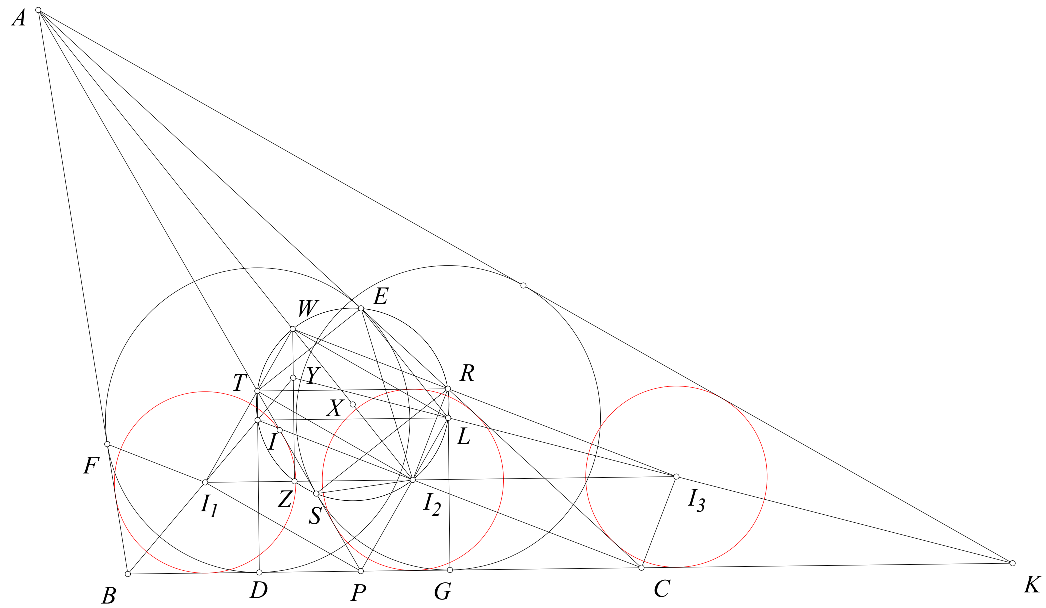
Do đó $\angle EI_2R' = \angle ETR' = \angle ATR' - \angle ATE = \angle APC - 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle PAC$.

Suy ra $\angle S'I_2R' = \angle TI_2E + 2\angle S'I_2R' = \angle ACP + 2\angle APC - 180^\circ + \angle PAC = \angle APC$.

Như vậy $\angle S'I_2R' = \angle SI_2R$ nên $S' \equiv S$, $R' \equiv R$ hay 7 điểm T, E, R, L, I_2, S, I cùng nằm trên ω. □

Nhận xét 1. Vì $\angle ITR = \angle LRT = 90^\circ$ nên TL và IR là các đường kình của ω. Do đó $TRLI$ là hình chữ nhật. Suy ra $ID = LG$. Ta thu được bán kính của hai đường tròn (I) và (L) bằng nhau.

Tính chất 2. Gọi Y là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK. W, Z lần lượt là giao điểm của đường thẳng qua Y vuông góc với BC với AI_2, I_1I_3. Khi đó W, Z cũng nằm trên ω.



Chứng minh. Ta sẽ xác định W bằng cách khác như sau:

Gọi W' là giao điểm của I_1T và I_3R. Ta sẽ chứng minh $W' \in AI_2$ và $W'Y \perp BC$.

Theo phép chứng minh bài toán mở đầu, I_1TI_2P là hình chữ nhật. Tương tự, CI_3RI_2 cũng là hình chữ nhật.

Do đó $\angle W'TI_2 = \angle W'RI_2 = 90^\circ$ hay I_2W' là đường kính của ω.

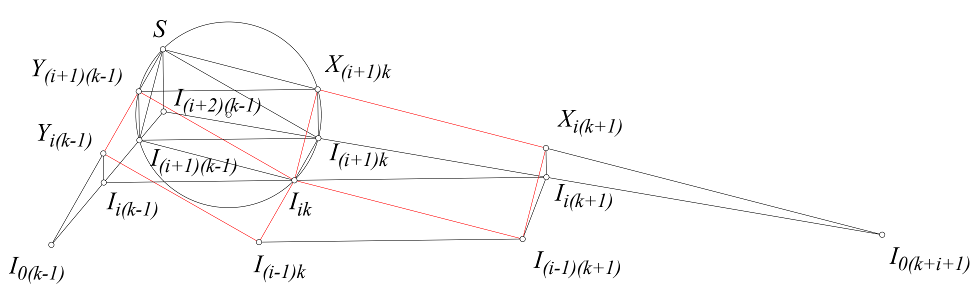
Lại có $I_2E = I_2T$ nên tâm X của ω nằm trên AI_2. Suy ra $W' \in AI_2$.

Mặt khác, theo nhận xét 1, $TR \parallel IL \parallel I_1I_3$ nên $\dfrac{TW'}{I_1W'} = \dfrac{TR}{I_1I_3} = \dfrac{IL}{I_1I_3} = \dfrac{YI}{YI_1}$. Ta thu được $W'Y \parallel TI$ hay $W'I \perp BC$.

Vậy $W' \equiv W$. Do $\angle WZI_2 = 90^\circ$ nên Z cũng nằm trên ω. $\square$

Bằng phép chứng minh tương tự tính chất 2, ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát về n tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng nhau như sau.

Tính chất 3. Cho một điểm P trong mặt phẳng và n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ liên tiếp trên một đường thẳng không đi qua P. Giả sử đường tròn nội tiếp của $n-1$ tam giác $PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_{n-1}A_n$ có bán kính bằng nhau. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp của hai tam giác PA_iA_{i+k} và PA_jA_{j+k} $(i, j = \overline{1, n-1}, i \neq j, k = \overline{1, n-2})$ có bán kính bằng nhau.



Chứng minh. Gọi (I_{kj}) là đường tròn nội tiếp tam giác IA_jA_{k+j} $(k+j \leq n)$.

Coi các điểm A_i như là điểm I_{0i}. Gọi $X_{i(k+1)}$ là giao điểm của đường thẳng qua $I_{0(k+i+1)}$ và song song với $I_{(i-1)(k+1)}I_{ik}$ với đường thẳng qua $I_{i(k+1)}$ và vuông góc với $I_{01}I_{0n}$; $Y_{i(k-1)}$ là giao điểm của đường thẳng qua $I_{0(k-1)}$ và song song với $I_{(i-1)k}I_{ik}$ với đường thẳng qua $I_{i(k-1)}$ và vuông góc với $I_{01}I_{0n}$.

Theo phép chứng minh bài toán mở đầu và nhận xét 1, các tứ giác $I_{0k}I_{1k}Y_{2(k-1)}Y_{1(k-1)}$ và $I_{0(k+1)}X_{1(k+1)}X_{2k}I_{1k}$ là các hình chữ nhật và $R_{(I_{21})} = ... = R_{(I_{2(n-2)})}$ hay $I_{21}I_{2(n-2)} \parallel I_{01}I_{0n}$.

Ta sử dụng phép quy nạp, giả sử $I_{ik}I_{(i-1)(k+1)}X_{i(k+1)}X_{(i+1)k}$ và $I_{ik}I_{(i-1)k}Y_{i(k-1)}Y_{(i+1)(k-1)}$ là các hình chữ nhật đồng thời $I_{(k+1)1}I_{(k+1)(n-k-1)} \parallel I_{01}I_{0n}$. Ta sẽ chứng minh $I_{ik}X_{(i+1)k}X_{(i+2)(k-1)}I_{(i+1)(k-1)}$ và $I_{ik}I_{(i+1)k}Y_{(i+1)(k-1)}Y_{i(k-1)}$ là các hình chữ nhật đồng thời $I_{(k+2)1}I_{(k+2)(n-k-2)} \parallel I_{01}I_{0n}$.

Thật vậy, Gọi S là giao điểm của $Y_{i(k-1)}Y_{(i+1)(k-1)}$ với $X_{i(k+1)}X_{(i+1)k}$. Ta có $\angle X_{(i+1)k}I_{ik}I_{(i+1)(k-1)} = \angle X_{(i+1)k}I_{(i+1)k}I_{(i+1)(k-1)} = \angle Y_{(i+1)(k-1)}I_{(i+1)(k-1)}I_{(i+1)k} = \angle Y_{(i+1)(k-1)}I_{ik}I_{(i+1)k} = \angle SY_{(i+1)(k-1)}I_{ik} = \angle SX_{(i+1)k}I_{ik} = 90^\circ$ nên các điểm $X_{(i+1)k}, I_{(i+1)k}, I_{ik}, I_{(i+1)(k-1)}, Y_{(i+1)(k-1)}, S$ cùng nằm trên một đường tròn có các đường kính là $SI_{ik}, Y_{(i+1)(k-1)}I_{(i+1)k}, I_{(i+1)(k-1)}X_{(i+1)k}$.

Ta thu được $I_{ik}I_{(i-1)(k+1)}X_{i(k+1)}X_{(i+1)k}$ và $I_{ik}I_{(i-1)k}Y_{i(k-1)}Y_{(i+1)(k-1)}$ là các hình chữ nhật.

Đồng thời $Y_{(i+1)(k-1)}X_{(i+1)k} \parallel I_{0(k-1)}I_{0(k+i+1)}$.

Theo định lý Thales, $\dfrac{SY_{(i+1)(k-1)}}{SI_{0(k-1)}} = \dfrac{Y_{(i+1)(k-1)}X_{(i+1)k}}{I_{0(k-1)}I_{0(k+i+1)}} = \dfrac{I_{(i+1)(k-1)}I_{(i+1)k}}{I_{0(k-1)}I_{0(k+i+1)}} = \dfrac{I_{(i+2)(k-1)}I_{(i+1)(k-1)}}{I_{(i+2)(k-1)}I_{0(k-1)}}$.

Suy ra $SI_{(i+2)(k-1)} \perp I_{0(k-1)}I_{0(k+i+1)}$.

Đặt $\dfrac{I_{ik}I_{(i+1)k}}{I_{ik}I_{(i-1)k}} = p$ thì tỉ số này luôn không đổi khi cho k chạy.

Ta có $\dfrac{I_{(i+1)(k-1)}I_{(i+2)(k-1)}}{I_{(i+1)(k-1)}I_{i(k-1)}} = \dfrac{Y_{(i+1)(k-1)}S}{Y_{(i+1)(k-1)}Y_{i(k-1)}} = \dfrac{I_{ik}I_{(i+1)k}}{I_{ik}I_{(i-1)k}} = p$.

Chứng minh tương tự, $\dfrac{I_{(i+1)k}I_{(i+2)k}}{I_{(i+1)k}I_{ik}} = p$. Do đó $I_{(i+2)(k-1)}I_{(i+2)k} \parallel I_{i(k-1)}I_{ik}$. Chứng minh tương tự suy ra $I_{(k+2)1}I_{(k+2)(n-k-2)} \parallel I_{01}I_{0n}$.

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét 2. Như vậy qua quá trình khai thác các tính chất liên quan tới lời giải của bài toán mở đầu, ta đã thu được phép chứng minh khá thú vị cho bài toán mở rộng về n đường tròn nội tiếp có bán kính bằng nhau. Bạn đọc có thể tìm thấy chứng minh khác cho tính chất 3 tại [4].

Tài liệu

[1] H. Fukagawa và T. Rothman, *Sacred Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

[2] T. Rothman, Japanese Temple Geometry, *Scientific American*, 1998, 5:84–91.

[3] Paris Pamfilos, *Some Remarks on a Sangaku from Chiba*, Forum Geom, Vol.15 (2015) 275-280.

[4] Nguyễn Văn Linh, *Mở rộng các bài toán hình học bằng phép quy nạp*, tạp chí Epsilon số 4, 08/2015 135-151.

[5] J-L. Ayme, *Equal incircles theorem or More incircles, a new adventure*, Ayme's Geometry blog. http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Email: ***Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com***