

Lời giải bài hình ngày 1 đề thi HSQ Quốc gia năm 2017

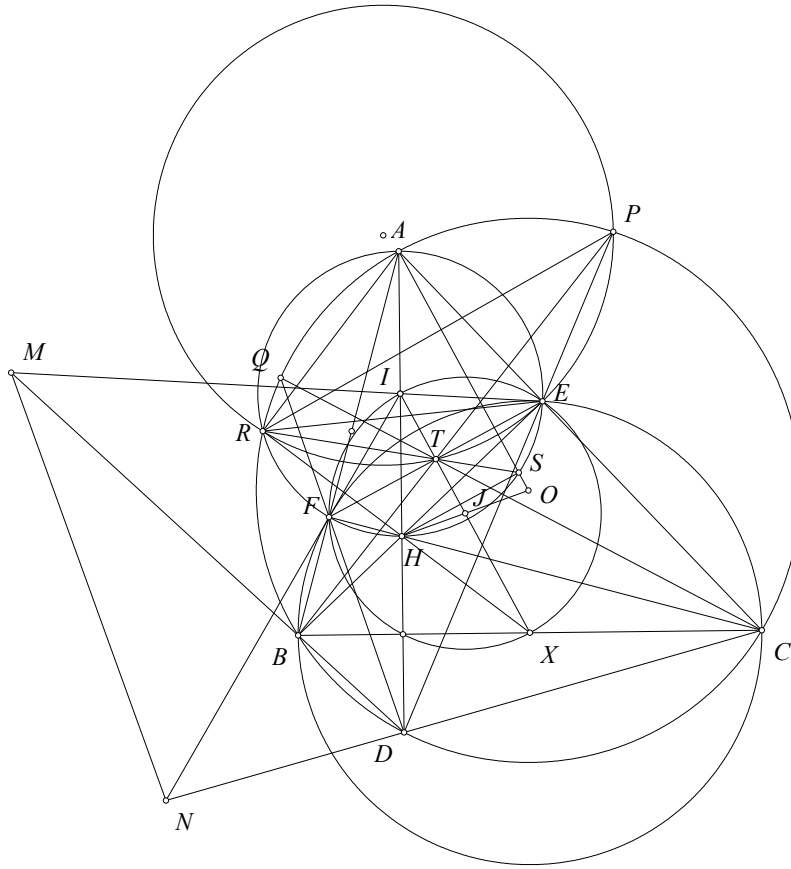
Nguyễn Văn Linh

Ngày 5/1/2017

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B và C . AH cắt (O) tại D khác A .

a) Gọi I là trung điểm của AH . EI cắt BD tại M và FI cắt CD tại N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.

b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần lượt tại R và S (R, S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.



Chứng minh. a) Gọi (J) là đường tròn Euler của tam giác ABC . Ta có $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2} \overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HI} \cdot \overline{HD}$. Suy ra tứ giác $BIED$ nội tiếp.

Do đó $\overline{MI} \cdot \overline{ME} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$ hay M thuộc trục đẳng phương của (J) và (O) .

Chứng minh tương tự, N cũng thuộc trục đẳng phương của (J) và (O) . Suy ra $MN \perp OJ$ hay $MN \perp OH$.

b) Gọi T là giao điểm của BP với EF .

Do R là tâm của phép vị tự quay biến EF thành CB nên $\triangle REF \sim \triangle RCB$. Suy ra $\angle REF = \angle RCB = \angle RPT$. Suy ra tứ giác $RTEP$ nội tiếp. Từ đó $\angle TRE = \angle TPE = \angle BRD$.

Gọi X là trung điểm BC , ta có XE, XF là hai tiếp tuyến kẻ từ X tới (AH) , X, H, R thẳng hàng nên $RFHE$ là tứ giác điều hòa. Từ đó $A(RHFE) = -1$. Chiếu lên (O) suy ra tứ giác $RBDC$ điều hòa. Ta thu được $\angle BRD = \angle XRC$.

Suy ra $\angle TRE = \angle XRC$ hay $\triangle TRS \sim \triangle XRC$ hay T là trung điểm EF .

Tương tự CQ cũng đi qua T . Ta chỉ cần chứng minh $T \in RS$.

Do AO và AH đẳng giác trong góc A nên $SE = FH$, suy ra RS, RH đẳng giác trong $\angle FRE$. Mà tứ giác $RFHE$ điều hòa nên RS đi qua trung điểm EF . Ta có đpcm.

□