Phương pháp đổi mô hình trong các bài toán hình học

Nguyễn Văn Linh - SV khoa Toán, ĐHSP Hà Nội

Kỉ niệm ngày 20/11/2016

1 Mở đầu

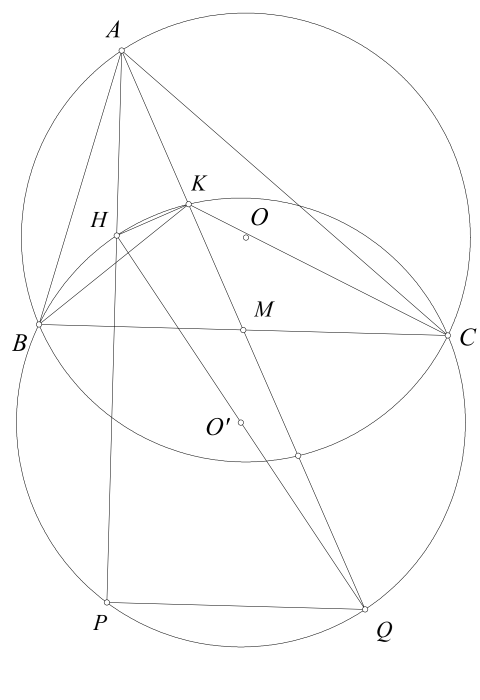
Trong hàng ngàn bài toán hình học thiên biến vạn hóa, sẽ có những lúc bạn tự đặt câu hỏi rằng hình như mình đã gặp bài toán này ở đâu, có một nét nào đó giống cái ta đã biết. Rất có thể bài toán bạn băn khoăn chỉ là một biến thể khác của bài toán cũ. Vì vậy một kĩ năng rất cần thiết trong giải toán hình học là liên hệ những bài toán lạ về mô hình quen thuộc để việc xử lý trở nên đơn giản hơn. Trong bài viết này xin giới thiệu một kinh nghiệm nhỏ của tác giả trong hai cấu hình liên quan tới trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp.

2 Đổi đỉnh trong mô hình trực tâm

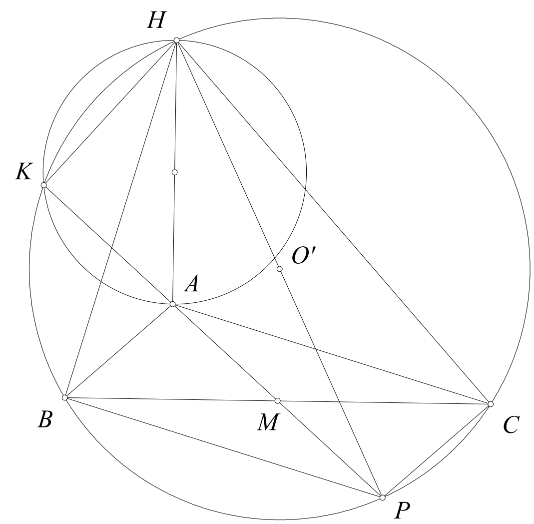
Ý tưởng đổi đỉnh xuất phát từ một nhận xét rất hiển nhiên rằng nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì A, B, C lần lượt là trực tâm của các tam giác BHC, CHA, AHB. Hay nói cách khác mô hình gồm 4 điểm A, B, C, H là hệ trực tâm với điểm bất kì trong hệ là trực tâm của tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm còn lại.

Giả sử bài toán chúng ta xét có tam giác ABC với trực tâm H thì thử đổi vị trí của A và H cho nhau (tức là nếu tam giác nhọn thì ta chuyển sang làm việc với tam giác tù và ngược lại). Sau đây là một số ví dụ.

Bài 1. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Trung tuyến AM. Gọi K là hình chiếu của H trên AM. Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.



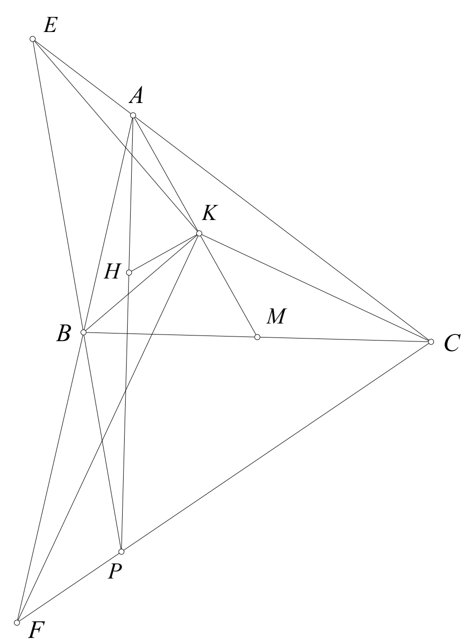
Bài toán này tương đối đơn giản nếu ta đổi vị trí hai điểm A và H. Thông thường bạn đọc hay vẽ tam giác ABC nhọn tuy nhiên hãy thử xét tam giác ABC tù và xem có gì lạ.



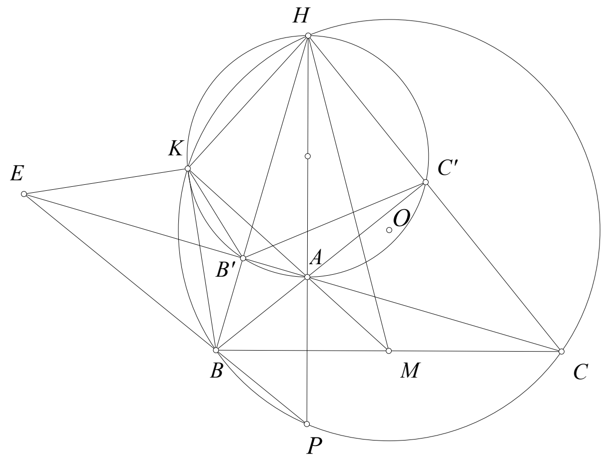
Rõ ràng bản chất của bài toán không đổi nhưng ta đã đưa về một cấu hình rất quen thuộc trong phép chứng minh đường thẳng Euler. Tất nhiên ta hoàn toàn có thể áp dụng một cách tương tự lời giải trong hình vẽ thứ hai vào hình vẽ thứ nhất.

Tôi vẫn nhớ năm ngoái trong một buổi dạy đội tuyển HSG lớp 9 ở Hà Nội, một học sinh hỏi tôi bài toán sau mà em đã suy nghĩ rất lâu không ra. Tôi gợi ý em thử đảo vị trí A và H cho nhau, kết quả thu được khá bất ngờ.

Bài 2. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Trung tuyến AM. Gọi K là hình chiếu của H trên AM. Các điểm E, F lần lượt nằm trên AC và AB sao cho $BK \perp KE$, $CK \perp KF$. BE cắt CF tại P. Chứng minh rằng A và P đối xứng nhau qua BC.



Sau khi chuyển vị trí ta được hình vẽ sau.



Chứng minh. Gọi B' là hình chiếu của B trên AC. EB cắt AH tại P'.

Ta có tứ giác $EKB'B$ nội tiếp nên $\angle EBK = \angle EB'K = \angle KHP'$. Suy ra tứ giác $KHP'B$ nội tiếp.

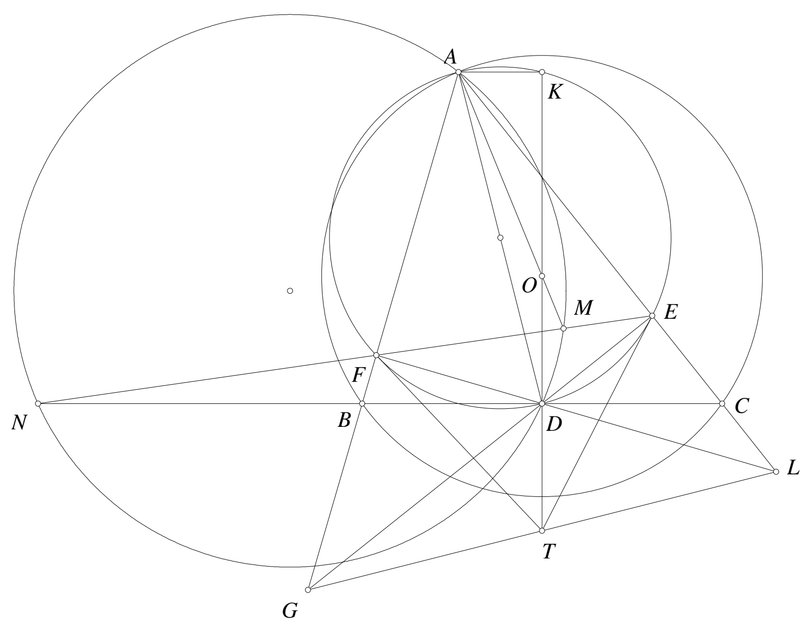
Do A là trực tâm tam giác BHC nên A và P' đối xứng với nhau qua BC. Chứng minh tương tự suy ra BE cắt CF tại $P' \equiv P$ đối xứng với A qua BC. □

Chúng ta đến với một ví dụ trong đề thi VMO năm 2016.

Bài 3. Cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC.

a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. EF cắt AO và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại E, F cắt nhau tại T. Chứng minh T thuộc một đường thẳng cố định.

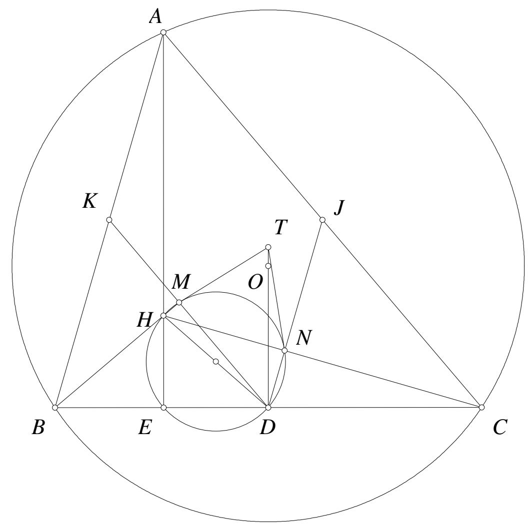


Chứng minh. Chúng ta chỉ quan tâm ý b của bài toán.

Kéo dài TD cắt (AEF) lần thứ hai tại K. Do tứ giác $KFDE$ là tứ giác điều hòa nên ta có $A(DKEF) = -1$. Lại có D là trung điểm BC nên $AK \parallel BC$. Mà $\angle AKD = 90^\circ nnKD \perp BC$. Điều này nghĩa là T nằm trên đường trung trực của BC cố định. □

Tuy nhiên bài toán này lại là một dạng biến thể khác của đề chọn đội tuyển Quốc tế của Việt Nam năm 2012 với việc đảo vị trí A và H.

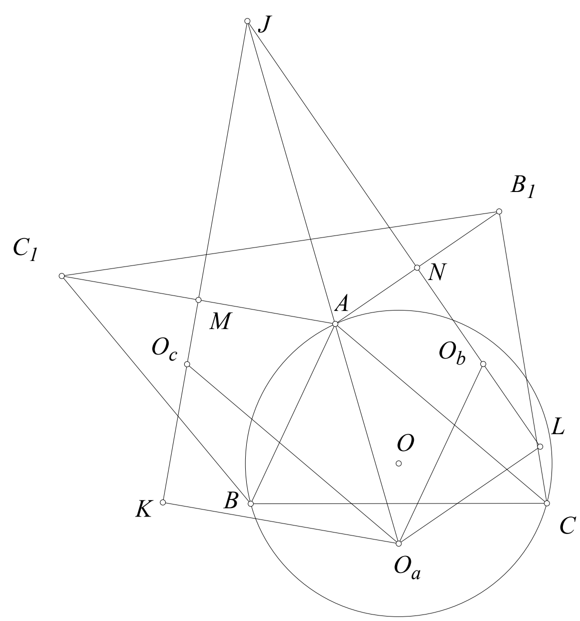
Bài 4. Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) sao cho BC không phải là đường kính của (O). A là điểm bất kì trên (O). Gọi D, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC, B trên DJ và C trên DK. Hai tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN giao nhau tại T. Chứng minh rằng T là điểm cố định khi A chuyển động trên (O).



Chi tiết cho hai bài toán này bạn đọc xem tại [1].

Tiếp theo là một bài toán từ kì thi Tuymaada- Republic of Saka, Russia.

Bài 5. *(Tuymaada 2009)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua AC, C_1 là điểm đối xứng với C qua AB, O_a là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 nằm trên AO_a.



Đây là một bài toán khá kinh điển, tác giả đã giới thiệu một cách giải sử dụng bổ đề liên quan tới đường thẳng Euler tại [2]. Ở đây xin giới thiệu một lời giải khác.

Chứng minh. Gọi O_b, O_c, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACB_1, ABC_1, AB_1C_1.

Kẻ O_aK, O_aL lần lượt vuông góc với JO_c, JO_b, M, N lần lượt là trung điểm AC_1, AB_1.

Dễ thấy O_a, O_b, O_c là các điểm đối xứng của B qua ba cạnh tam giác ABC.

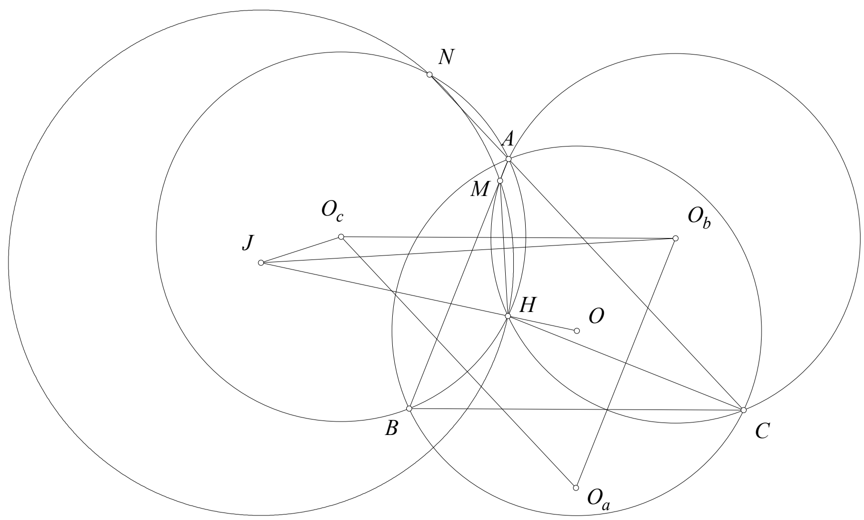
Ta có J, A, O_a thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{AM}{O_aK} = \dfrac{AN}{O_aL}$ hay $\dfrac{O_aK}{O_aL} = \dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{O_aO_c}{O_aO_b}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh hai tam giác O_aKO_c và O_aLO_b đồng dạng. (1)

Tuy nhiên chú ý rằng $\angle C_1AB = 2\angle BAC = \angle B_1AB$ và $O_aC \parallel AC$, $KO_c \perp AC_1$, $O_aO_b \parallel AB$, $LO_b \perp AB_1$ nên $\angle KO_cO_a = \angle LO_bO_a$. Do đó (1) hiển nhiên. □

Trong kì thi APMO năm 2010 lại có bài toán sau.

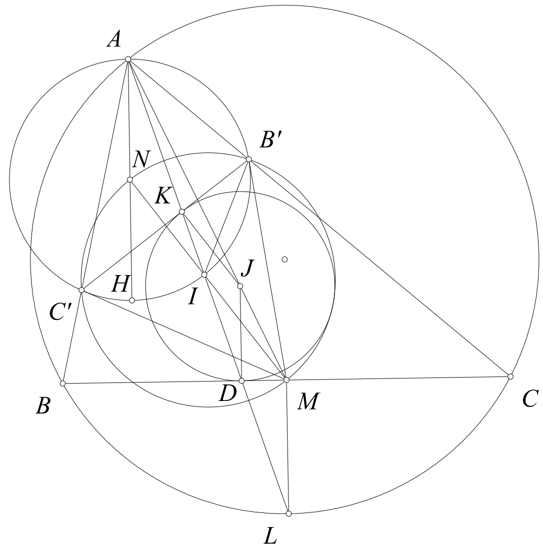
Bài 6. *(APMO 2010)*. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với H là trực tâm. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt AB lần thứ hai tại M, đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB cắt AC lần thứ hai tại N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN nằm trên OH.



Thực chất bài 6 thu được từ bài 5 nhờ việc đảo vị trí của A và H cho nhau. Do (AHC) giao AB tại M nên $\angle HBC = \angle HCA = \angle HMB$ hay B và M đối xứng nhau qua HC. Tương tự C và N đối xứng qua BH.

Tiếp theo chúng ta đến với một bài toán được tác giả *Luis González* sử dụng làm bổ đề trên diễn đàn AoPS như sau.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$, phân giác AD, M là trung điểm BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng (J, JD) tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên AC, AB; K là giao điểm của AD và $B'C'$, H là trực tâm, N là trung điểm của AH, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $MB'C'$, L là điểm chính giữa cung BC của (ABC).

Ta có $\angle B'IC' = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B'MC' = 180^\circ - \angle B'AC'$ nên I nằm trên $(AB'C')$ hay (N, NA).

Mà $MB' = MC'$ nên $IB' = IC'$. Điều này nghĩa là I nằm trên AD.

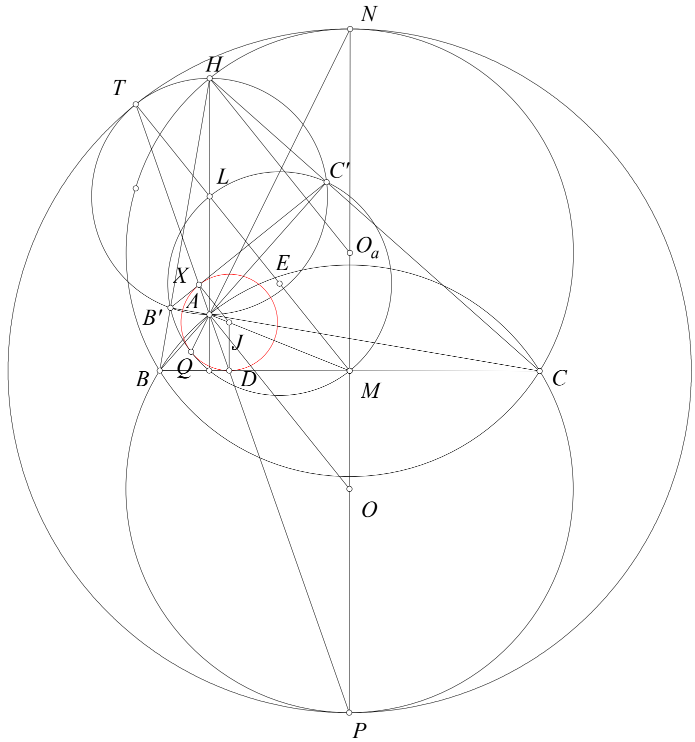
Do N là điểm chính giữa cung $B'C'$ nên M, I, N thẳng hàng. Mà $NA = NI$ nên theo định lý Thales, $MI = ML$.

Mặt khác, $\triangle AB'C' \cup I \sim \triangle ABC \cup L$ nên $\frac{JD}{ML} = \frac{AJ}{AM} = \frac{AD}{AL} = \frac{AK}{AI} = \frac{MI}{JK}$, ta thu được $JK = JD$ và $JK \perp B'C'$.

Do đó (J, JD) tiếp xúc với $B'C'$.

Do tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $MB'C'$ nằm trên KD nên áp dụng định lý Sawayama-Thebault, (J, JD) là đường tròn Thebault của tam giác $MB'C'$ nên tiếp xúc với $(MB'C')$ hay đường tròn Euler của tam giác ABC. $\square$

Cũng xem xét bài toán trên nhưng trong trường hợp hình vẽ tam giác ABC tù ta có lời giải khác như sau.



Chứng minh. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, B', C' là hình chiếu vuông góc của B, C trên AC, AB; L là trung điểm AH, E là tâm đường tròn Euler, ML giao (AH) tại T, N là trung điểm cung BHC của (O_a)- đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC, P là đối xứng của N qua M.

Ta có $MT = TL + LM = LH + HO_a = O_aN + O_aM = MN = MP$ nên (M, MN) tiếp xúc với $(AH), (O)$ và (O_a).

Mặt khác, $ALMO$ là hình bình hành và $LA = LT, OA = OP$ nên A, T, P thẳng hàng. Gọi X, D lần lượt là giao điểm của TP với $B'C', BC$,.

Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_A^{\overline{AC}\cdot\overline{AB'}}$: $(O_a) \leftrightarrow (E), BC \leftrightarrow (AH), B'C' \leftrightarrow (O)$ nên $P \leftrightarrow X, T \leftrightarrow D, N \leftrightarrow Q$.

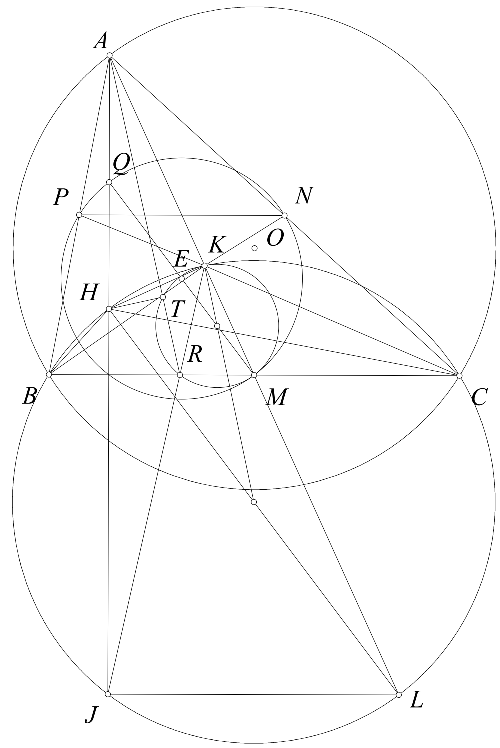
Do (M, MN) tiếp xúc với $(AH), (O)$ và (O_a) nên (XQD) tiếp xúc với $BC, B'C'$ và(E). Gọi J là tâm của (XDQ) thì $JD \perp BC, JX \perp B'C'$.

Lại có $PB = PC$ nên AD là phân giác của $\angle BAC$. Ta có $\triangle BAC \cup D \cup P \sim \triangle B'AC' \cup X \cup T$ nên $\frac{AD}{AP} = \frac{AX}{AT}$, mà $JX \parallel TM, JD \parallel PM$, $JX = JD, MT = MP$ ta thu được A, J, M thẳng hàng.

Vậy (J, JD) tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC. □

Bài 8. *(Andria)* Cho tam giác ABC với trực tâm H. Tiếp tuyến tại B và C của (ABC) cắt nhau tại S. AS giao BC tại R. M là trung điểm BC. Gọi T là hình chiếu của H trên AS. Chứng minh rằng (MRT) tiếp xúc với (BHC).

Chứng minh. Cách 1.



Chúng ta sẽ chứng minh rằng (MRT) tiếp xúc với cả (BHC) và đường tròn Euler của tam giác ABC.

Gọi AM giao (BHC) tại K. BK, CK giao AC, AB tại N, P, PN cắt AM tại I. Khi đó PN song song với BC và I là trung điểm của PN.

Ta có $\angle PKN = \angle BKC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ nên tứ giác $APKN$ nội tiếp và BC là đường đối cực của I ứng với $(APKN)$.

Do AR là đường đối trung của tam giác ANP nên AR cắt đường đối cực của I tại điểm liên hợp với I trong $(APKN)$ hay RP và RN là hai tiếp tuyến của $(APKN)$.

Suy ra $IR \perp BC$. Lại có $(AKIM) = -1$nên $R(AKIM) = -1$ hay RI là phân giác của $\angle ARK$. Gọi J là giao điểm của RK và AH thì J là điểm đối xứng với A qua BC.

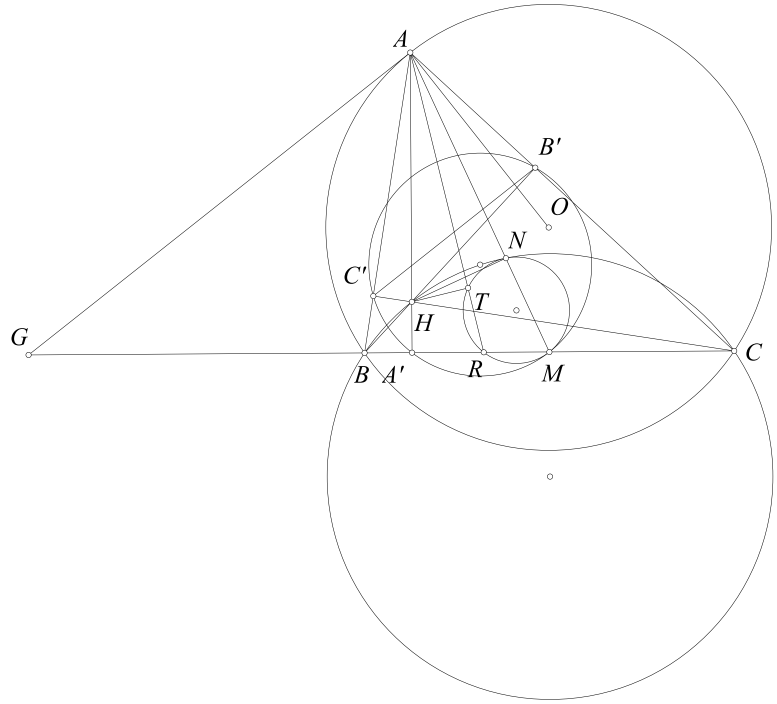
Gọi L là điểm đối xứng của A qua M thì $JL \parallel BC$ và $J, L \in (BHC)$. Mà $\angle HJL = 90^\circ$ nên HL là đường kính của (BHC). Suy ra $\angle BKL = 90^\circ$ ohay $K \in (AH)$.

Ta có $\angle ATK = \angle AHK = \angle AMB$ nên $K \in (TRM)$. phép vị tự tâm K biến M thành L, R thành J nên (KRM) tiếp xúc với (KLJ) hay (BHC).

Hơn nữa, gọi Q là trung điểm AH, X là giao điểm của IR và QM.

Ta có $QM \parallel HL$ nên $\angle RXM = \angle HQM = \angle JHL = \angle JKL$, suy ra $X \in (KRM)$ và XM là đường kính của (KRM). Do đó tâm của (KRM) nằm trên MQ hay đường nối tâm đường tròn Euler và (KRM) đi qua M. Điều này nghĩa là (KRM) tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC.

Cách 2.



Gọi N là giao của AM với cung BHC của (BHC); A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, CA, AB.

Do $\angle HNM = 90^\circ$ ta thu được T là điểm Miquel của tam giác $AA'M$ ứng với 3 điểm R, N, H, suy ra tứ giác $TNMR$ nội tiếp. Tiếp tuyến của (O) qua A cắt BC tại G. Do AR là đường đối trung ta thu được $(GRBC) = -1$. Suy ra $MR \cdot MG = MB^2$.

Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_M^{MB^2} : N \leftrightarrow A, R \leftrightarrow G$ nên $(MNR) \leftrightarrow AG, (BHC) \leftrightarrow (O)$, (E) (đường tròn Euler của tam giác ABC) $\leftrightarrow B'C'$. Do AG tiếp xúc với (O) và song song với $B'C'$ ta thu được (MNR) tiếp xúc với (BHC) và (E). $\square$

Sau đây tác giả sẽ đổi vị trí của A và H để sáng tác bài toán mới.

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. M là trung điểm BC. R là chân đường đối trung ứng với đỉnh H của tam giác BHC. Gọi T là hình chiếu của A trên HR. Chứng minh rằng (RMT) tiếp xúc với (O).

Mở rộng bài toán 9 ta thu được hai kết quả khá thú vị.

Bài 10. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) bất kì đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. BE giao CF tại P. Gọi N là chân đường đối trung ứng với đỉnh P của tam giác BPC. Kẻ AK vuông góc với PN. Chứng minh rằng (NMK) tiếp xúc với (O).

Bài 11. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) bất kì đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. BE giao CF tại P. Gọi N là điểm thuộc BC sao cho PN và PJ đẳng giác trong $\angle BPC$. Kẻ $AK \perp PN$. Tia JP cắt (O) tại L. Chứng minh rằng (LKN) đi qua trung điểm BC.

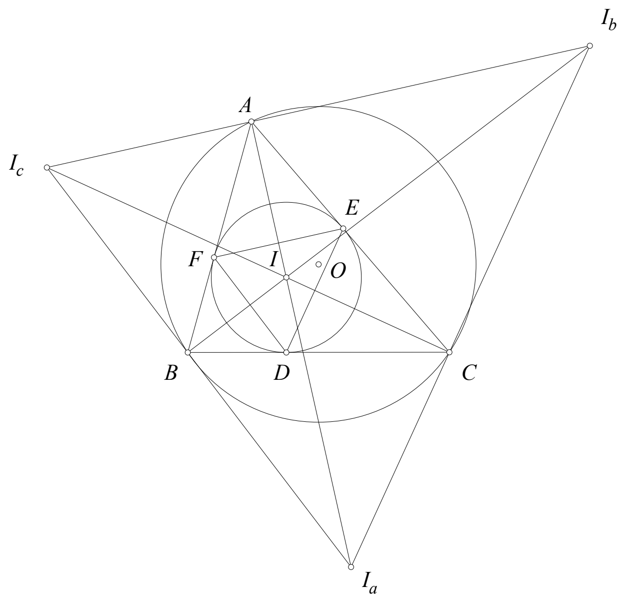
Có thể thấy việc đảo vị trí A và H cũng là một cách để sáng tạo bài toán mới.

3 Chuyển mô hình tâm nội tiếp thành trực tâm

Ý tưởng của phương pháp này xuất phát từ một kết quả quen thuộc: tâm đường tròn nội tiếp là trực tâm của tam giác có 3 đỉnh là 3 tâm bàng tiếp. Trong một số bài toán xuất hiện tâm đường tròn nội tiếp, ta có thể dựng thêm 3 tâm bàng tiếp để chuyển thành mô hình trực tâm.

Ta xét một số ví dụ sau.

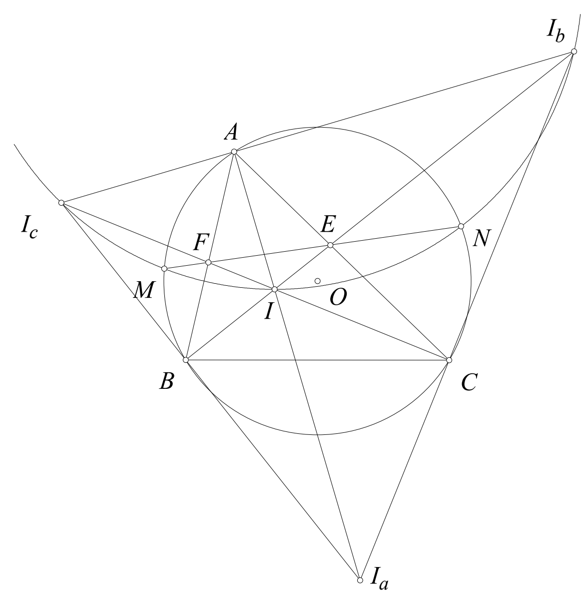
Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Chứng minh rằng OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.



Chứng minh. Gọi I_a, I_b, I_c là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC. Dễ thấy I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c, O$ là tâm đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$ nên OI là đường thẳng Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Do $EF \perp AI, I_bI_c \perp AI$ nên $I_bI_c \parallel EF$. Chứng minh tương tự suy ra hai tam giác $I_aI_bI_c$ và DEF có cạnh tương ứng song song, do đó đường thẳng Euler của hai tam giác song song với nhau. Mặt khác, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF nên I nằm trên đường thẳng Euler của hai tam giác DEF và $I_aI_bI_c$. Do đó hai tam giác DEF và $I_aI_bI_c$ có chung đường thẳng Euler. Ta có đpcm. □

Có thể thấy việc dựng 3 điểm I_a, I_b, I_c khiến cho bài toán trở nên quen thuộc hơn. Làm việc với trực tâm thường dễ dàng hơn với tâm đường tròn nội tiếp.

Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R). Hai phân giác BE, CF giao nhau tại I. EF cắt (O) tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN bằng $2R$.



Chứng minh. Dựng các tâm đường tròn bàng tiếp I_a, I_b, I_c của tam giác ABC.

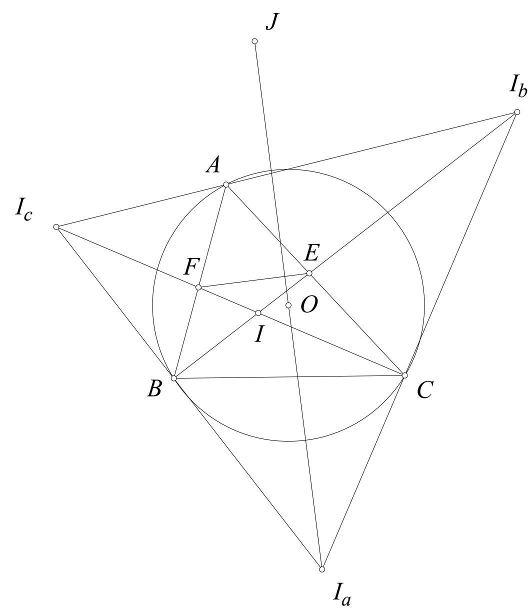
Ta có tứ giác IAI_cB nội tiếp nên $\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FI} \cdot \overline{FI_c}$. Do đó F thuộc trục đẳng phương của (II_bI_c) và (O).

Tương tự suy ra EF là trục đẳng phương của (II_bI_c) và (O).

Suy ra M, N chính là giao điểm của hai đường tròn.

Lại có (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$ nên cũng là đường tròn Euler của tam giác II_bI_c. Suy ra $R_{(II_bI_c)} = R_{(I_aI_bI_c)} = 2R$. □

Bài 14. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi I_a tâm bàng tiếp góc A. Hai phân giác BE, CF. Chứng minh rằng $OI_a \perp EF$.



Chứng minh. Bài 14 là hệ quả trực tiếp của bài 13. Thật vậy I_aO đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp J của tam giác I_bII_c. Mà EF là trục đẳng phương của (I_bII_c) và (O) nên $EF \perp JO$. Suy ra $OI_a \perp EF$. □

Nhận xét. Ta có thể phát biểu lại bài toán theo cách khác như sau.

Cho tam giác ABC. Các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại trực tâm H. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của $A'B'$ với HC, $A'C'$ với HB. Gọi E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AE \perp PQ$.

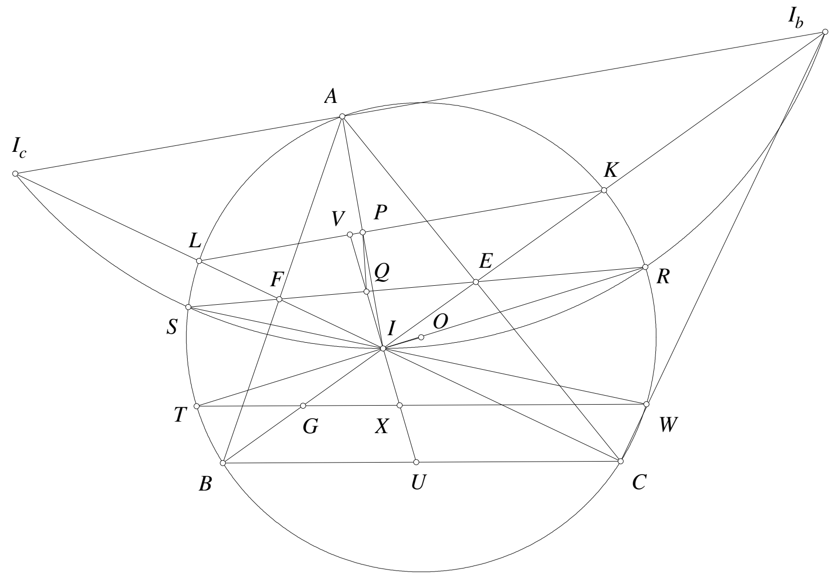
Bài 15. *(Việt Nam TST 2016)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động trên cung BC của (O). Các phân giác AD, BE, CF giao nhau tại I. Đường tròn qua D tiếp xúc với OA tại A cắt (O) tại G. GE, GF giao (O) lần thứ hai tại M, N. BM giao CN tại H.

a) Chứng minh rằng AH đi qua một điểm cố định.

b) BE, CF giao (O) lần lượt tại K, L. AH giao KL tại P. Q là một điểm trên EF sao cho $QP = QI$. J là điểm nằm trên (BIC) sao cho $IJ \perp IQ$. Chứng minh rằng trung điểm IJ chuyển động trên một đường tròn cố định.

Chứng minh. Ta chỉ quan tâm ý b của bài toán.

(Đào Vũ Quang, HS lớp 12 THPT Hà Nội-Amsterdam).



Gọi I_b, I_c lần lượt là tâm bàng tiếp góc B, C. EF cắt (O) tại R, S. RI, SI cắt (O) lần thứ hai tại T, W. TW cắt BI tại G. Đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt LK, BC, TW, SR lần lượt tại V, U, X, Q'.

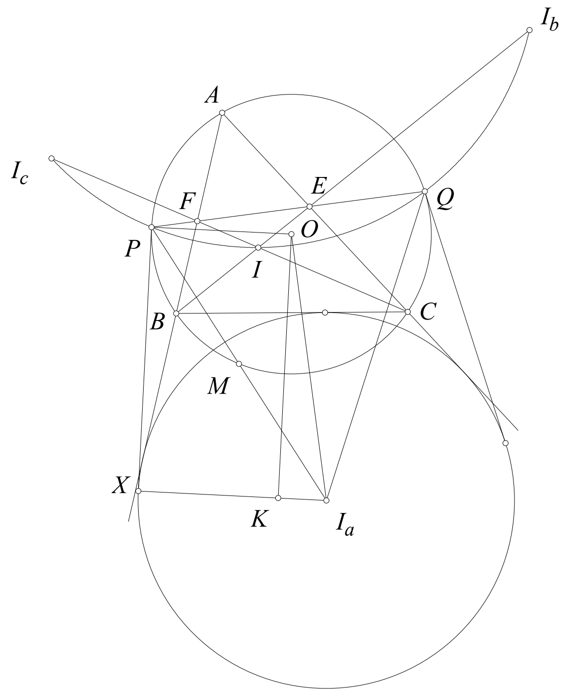
Ta có tứ giác $AICI_b$ nội tiếp nên $EA \cdot EC = EI \cdot EI_b$, suy ra E nằm trên trục đẳng phương của (O) và (I_bII_c). Tương tự với F. Do đó EF là trục đẳng phương của hai đường tròn, suy ra $R, S \in (I_bII_c)$.

Ta có $\angle GTR = \angle WSR = \angle II_bR$, suy ra tứ giác GTI_bR nội tiếp. Ta thu được $IG \cdot II_b = IT \cdot IR = IB \cdot IK = \dfrac{1}{2} IB \cdot II_b$. Suy ra G là trung điểm IB.

Tương tự suy ra TW là đường trung bình của tam giác IBC. Áp dụng định lý con bướm cho (O), điểm I và hai dây BK, CL đi qua I ta có $IV = IU$. Lại áp dụng định lý con bướm cho hai dây SW và RT đi qua I suy ra $IQ = IX$. Mà X là trung điểm IU nên Q' là trung điểm IV. Suy ra $Q'P = Q'I = Q'V$ hay $Q' \equiv Q$. Vậy $OI \perp IQ$.

Vậy $O \in IJ$. Gọi M' là trung điểm IJ, S là điểm chính giữa cung BC ta có $\angle OM'S = 90^\circ$ nên M' nằm trên (OS) cố định. $\square$

Bài 16. *(Lym)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường tròn bàng tiếp (I_a). Gọi P, Q là tiếp điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (I_a) với (O). Hai phân giác BE, CF. Chứng minh rằng P, Q, E, F thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi I_a, I_b là các tâm đường tròn bàng tiếp góc B và C. M là giao điểm thứ hai của I_aP với (O). X là tiếp điểm của tiếp tuyến chung ngoài đi qua P với (I_a). Kẻ $OK \perp I_aX$.

Theo hệ thức Euler, ta có $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ và $PX^2 = OK^2 = OI_a^2 - KI_a^2 = R^2 + 2Rr_a - (r_a - R)^2 = 4Rr_a - r_a^2$.

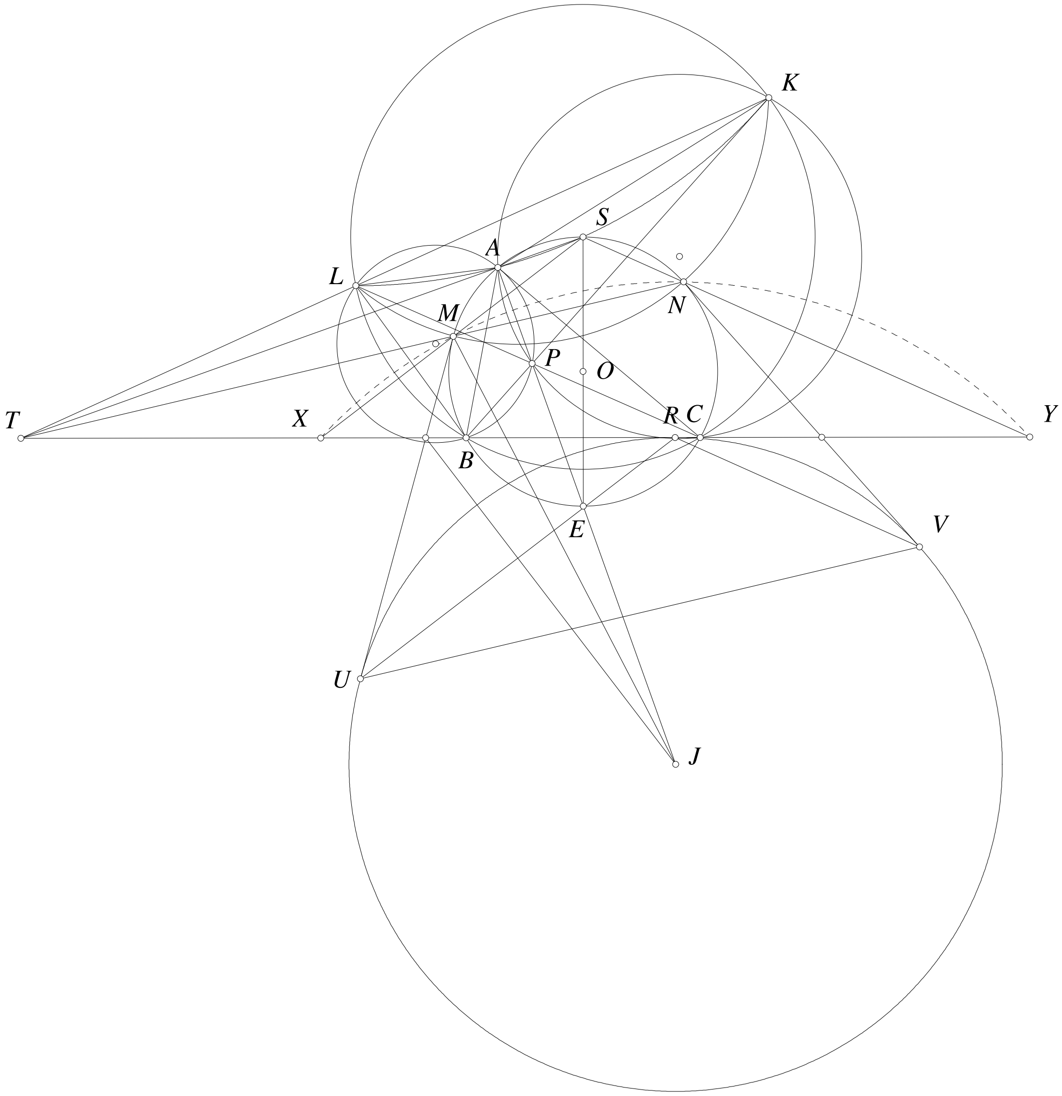
Suy ra $PI_a^2 = 4Rr_a$. Mà $\mathcal{P}_{I_a/(O)} = OI_a^2 - r_a^2 = 2Rr_a$ nên $I_aP \cdot I_aM = 2Rr_a$. Do đó M là trung điểm PI_a.

Ta có I_a là trực tâm tam giác II_aI_b nên I_a là tâm vị tự ngoài của (II_aI_b) và (O)-đường tròn Euler của tam giác II_aI_b.

Xét $\mathcal{H}_{I_a}^2 : (O) \mapsto (II_aI_b)$, $M \mapsto P$ nên $P \in (II_aI_b)$. Tương tự $Q \in (II_aI_b)$. Theo bài toán 13 suy ra P, Q, E, F thẳng hàng. □

Mấu chốt của bài toán là chứng minh I_b, I_c, P, Q đồng viên. Từ ý tưởng này ta có thể mở rộng bài toán 16 như sau.

Bài 17. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là điểm bất kì nằm trên phân giác góc A. BP giao (APC) lần thứ hai tại K, CP giao (APB) lần thứ hai tại L. J là điểm bất kì nằm trên AP sao cho đường tròn tâm J tiếp xúc với BC không chứa trong (O). Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc với (O) tại M và N. Chứng minh rằng B, C, M, N đồng viên.



Chứng minh. Gọi S là điểm chính giữa cung BAC. Ta có $SB = SC$ và $\angle BSC = \angle BAC = 2\angle PAC = 2\angle BKC = 2\angle BLC$ nên S là tâm ngoại tiếp của tứ giác $BLKC$.

Mặt khác, $\angle LAB = \angle LPB = \angle CPK = \angle CAK$ nên AB, AC đẳng giác trong $\angle LAK$ hay AP là phân giác của $\angle LAK$, suy ra AS là phân giác ngoài $\angle LAK$. Mà $SL = SK$ nên L, A, S, K đồng viên. Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho 3 đường tròn $(LASK), (O), (S)$ suy ra LK, AS, BC đồng quy tại T.

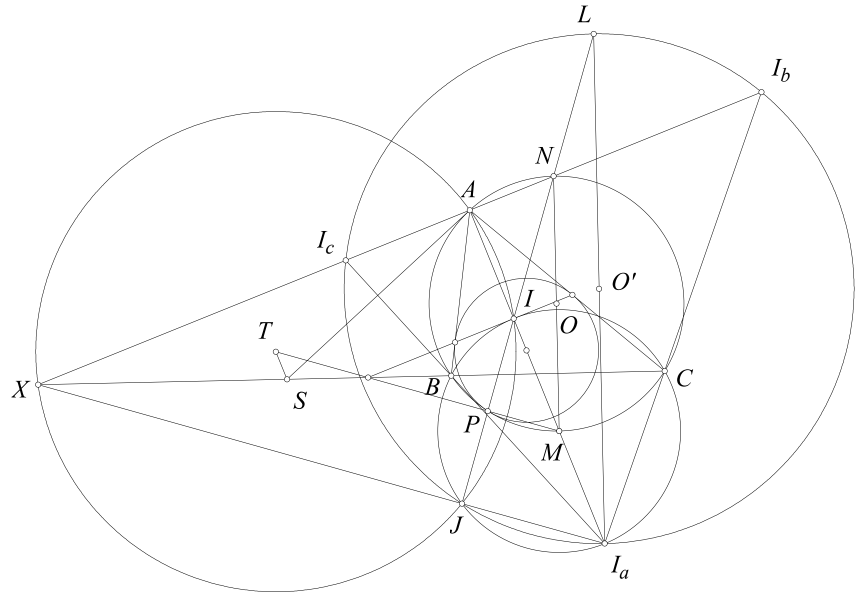
Kéo dài SM, SN giao BC tại X, Y. Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung ngoài với (J), R là tiếp điểm của (J) với BC. Ta có $OS \parallel JR$ suy ra $MS \parallel RU, NS \parallel RV$.

Ta có $\angle SM \cdot SX = SB^2 = SN \cdot SY$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp, suy ra $\angle MXY = \angle MNS = \angle XMU$, suy ra $XMRU$ là hình thang cân có J nằm trên trục đối xứng, suy ra $JM = JX$. Tương tự $JN = JY$, mà $JM = JN$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp đường tròn tâm J. Gọi E là điểm chính giữa cung BC suy ra A là giao của JE với (SMN). Từ đó A là điểm Miquel của tứ giác toàn phần nội tiếp $XMNYST$, suy ra AS, MN, XY đồng quy tại T.

Vậy $TL \cdot TK = TA \cdot TS = TM \cdot TN$ hay tứ giác $LMNK$ nội tiếp. □

Tiếp tục là một bài toán liên quan tới tiếp điểm của đường tròn mixtilinear.

Bài 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung BC và cung BAC của (O). NI giao (O) lần thứ hai tại P. MP giao trung trực AI tại T. Gọi S là giao của tiếp tuyến tại A của (O) với BC. Chứng minh rằng $TS \parallel AI$.



Chứng minh. Dựng các tâm đường tròn bàng tiếp I_a, I_b, I_c của tam giác ABC. Khi đó N là trung điểm I_bI_c, I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$.

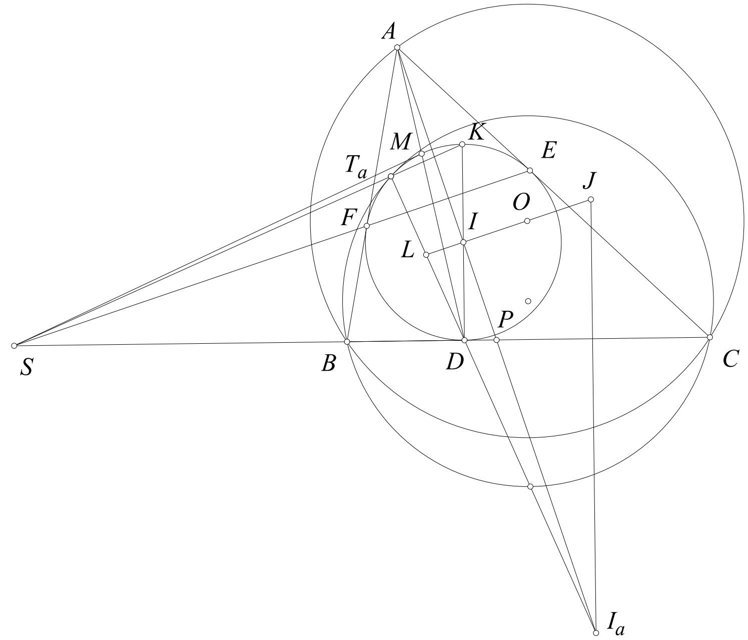
Gọi J là giao của NI với (II_a) thì $J \in (I_aI_bI_c)$ và do $\angle IJI_a = \angle IPM = 90^\circ$ nên P là trung điểm IJ.

Xét trục đẳng phương của ba đường tròn $(I_bI_c), (II_a), (I_aI_bI_c)$ ta có I_bI_c, BC, I_aJ đồng quy tại X.

Do T nằm trên trung trực của AI và IJ nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AIJX$. Suy ra $TA = TX$.

Mặt khác, do S là tâm đường tròn A-Apollonius của tam giác ABC nên $SA = SX$. Suy ra $TS \perp AX$. Vậy $TS \parallel AI$. □

Bài 19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Dựng đường tròn đi qua B, C và tiếp xúc với (I) tại T_a. Tương tự xác định T_b, T_c. Chứng minh rằng các đường thẳng DT_a, ET_b, FT_c, OI đồng quy.



Chứng minh. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. AD cắt (I) lần thứ hai tại M.

Do tứ giác DEMF điều hòa nên tiếp tuyến tại M và D của (I) cắt nhau tại S trên EF. Ta thu được $(SDBC) = -1$.

Ta có T_aD là phân giác $\angle BT_aC$ và $\angle KT_aD = 90^\circ$ nên $T_a(DKBC) = -1 = (DSBC)$. Suy ra T_aK đi qua S. Ta thu được tứ giác T_aMKD điều hòa.

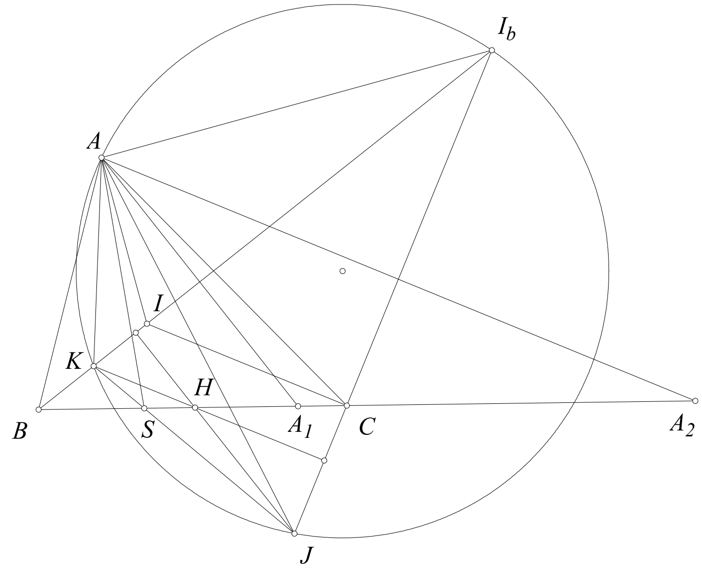
Dựng các tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c của tam giác ABC. AI cắt BC tại P.

Do $(APII_a) = -1$ nên $D(APII_a) = -1 = (MDKT_a)$ nên T_a, D, I_a thẳng hàng.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$. Do (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$ nên $I_aJ = 2R$. Lại có $I_aJ \perp BC$ nên nếu gọi L là giao của I_aD với OI thì $\dfrac{LI}{LJ} = \dfrac{r}{2R}$. Chứng minh tương tự suy ra DT_a, ET_b, FT_c, OI đồng quy tại L. □

Về cách giải khác, bạn đọc xem tại [3].

Bài 20. Cho tam giác ABC. S là điểm bất kì trên BC. K, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABS và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ACS. Chứng minh rằng đường thẳng qua K vuông góc với JC và đường thẳng qua J vuông góc với KB luôn cắt nhau tại một điểm nằm trên BC.



Chứng minh. Dựng tâm đường tròn nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp I_b của tam giác ABC.

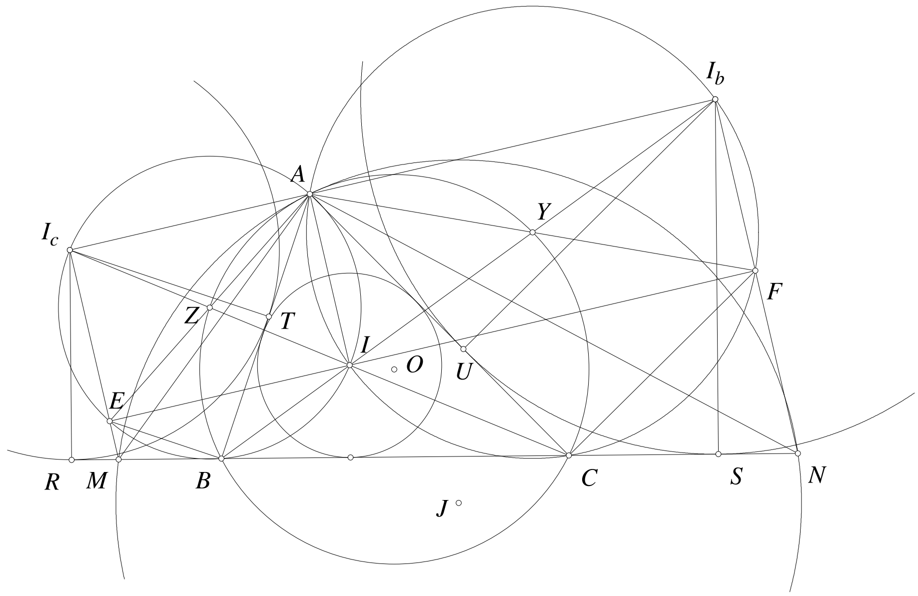
Ta có tứ giác $AICI_b$ nội tiếp nên $\angle KI_bJ = \angle IAC = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle KAJ$.

Suy ra tứ giác $AKJI_b$ nội tiếp.

Lại có BI_a, CI_a lần lượt là phân giác các góc B và C của tam giác ABC nên đối xứng của A qua KI_b, JI_b đều nằm trên BC. Do đó BC là đường thẳng Steiner của A trong tam giác KJI_b. Vậy trực tâm tam giác KJI_b nằm trên BC. □

Cuối cùng chúng ta đến với một bài toán trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Bài 21. *(THTT tháng 9/2016).* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. Qua I kẻ đường thẳng d vuông góc với AI. Trên d lấy hai điểm E, F sao cho $\angle EBA = \angle FCA = 90^\circ$. Qua E, F kẻ các đường vuông góc với d cắt BC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng (AMN) tiếp xúc với (O).



Chứng minh. Ta phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Hai điểm M, N nằm trên BC sao cho AM, AN là hai đường đẳng giác trong $\angle BAC$. Khi đó (AMN) tiếp xúc với (O).

Trở lại bài toán.

Dễ thấy các tứ giác $AIBE$ và $AICF$ lần lượt nội tiếp đường tròn có tâm Z, Y- các điểm chính giữa cung AB và AC của (O).

Gọi I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. Ta có II_b, II_c lần lượt là đường kính của $(Y), (Z)$. Do đó I_b, F, N thẳng hàng và I_c, E, M thẳng hàng.

Gọi T, R là tiếp điểm của (I_c) với AB, BC, U, S là tiếp điểm của (I_b) với AC, BC.

Ta có $I_cR \parallel I_bS$ và $I_cM \parallel I_bN$, suy ra $\triangle I_cRM \sim \triangle I_bSN$. Ta thu được $\dfrac{I_cM}{I_bN} = \dfrac{I_cR}{I_bS} = \dfrac{I_cT}{I_bU}$.

Dễ thấy $\triangle I_cTA \sim \triangle I_bUA$ nên $\dfrac{I_cT}{I_bU} = \dfrac{I_cA}{I_bA}$. Vậy $\dfrac{I_cM}{I_bN} = \dfrac{I_cA}{I_bA}$.

Do đó $\triangle MI_cA \sim \triangle NI_bA$. Ta thu được $\angle MAI_c = \angle NAI_b$ hay AM, AN đẳng giác trong $\angle BAC$
Áp dụng bổ đề suy ra đpcm. □

Có thể mở rộng bài toán như sau.

Bài 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P và Q là hai điểm bất kì nằm trên phân giác góc A. BP, CP giao $(APC), (APB)$ lần lượt tại E, F. BQ, CQ giao (O) lần lượt tại K, L. AK giao (APC) tại Y, AL giao (APB) tại Z. EY, FZ giao BC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng (O) tiếp xúc với (AMN).

Như vậy việc dựng thêm các tâm đường tròn bàng tiếp cũng tạo ra ý tưởng mới giúp cho việc mở rộng bài toán ban đầu.

Qua hai cấu hình trên, bạn đọc có thể thấy tuy các bài toán hình học muôn hình muôn vẻ, nhưng bằng một cách nào đó ta vẫn có thể đưa được về bài toán quen biết. Việc này đòi hỏi kinh nghiệm cũng như sự cảm nhận tốt. Chúc các bạn thành công!

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Linh, *Bài toán số 3 trong kì thi chọn HSG Quốc gia năm 2016*, Euclidean Geometry Blog.

https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2016/01/10/note-about-problem-3-vmo-2016/

[2] Nguyễn Văn Linh, *Từ một bổ đề về đường thẳng Euler*, Kỷ yếu Gặp gỡ toán học 2016.

[3] Nguyễn Văn Linh, *Phương tích và trục đẳng phương của đường tròn điểm*, Euclidean Geometry Blog.

https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/02/04/radical-axis-of-a-point-and-a-circle/

[4] Nguyễn Văn Linh, *Hai bài toán hình học trong kì thi Việt Nam TST 2016*, Euclidean Geometry Blog.

https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2016/03/29/two-geometry-problems-in-vietnam-tst-2016/

[5] AoPS topic *Incenter and excenter*.

http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h1087647p4817396

[6] AoPS topic *Very hard*.

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h385175

[7] AoPS topic *geometry*.

http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1155918p5619007

[8] AoPS topic *tangent to BHC*.

http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1130448p5554253

[9] AoPS topic *Concyclic points*.

http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1172663p5641273

Email: ***Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com***