XUNG QUANH BÀI 3 VMO 2012

Nguyễn Văn Linh, SV K50-TCNH Đại học Ngoại Thương Hà Nội

19/01/2012

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này tác giả chứng minh lại bài số 3 trong kì thi chọn HSG Quốc gia năm 2012. Đồng thời chúng ta sẽ khai thác bài toán trong trường hợp tổng quát.

1 Chứng minh bài toán

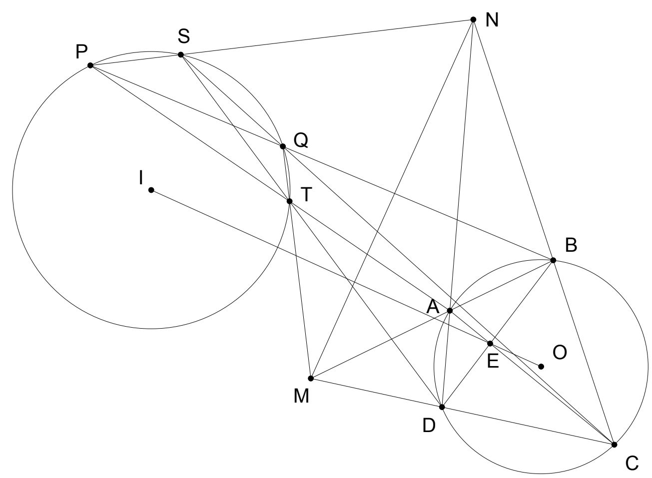
Bài toán.

Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MBN}$, $\widehat{MBN}$ và $\widehat{MCN}$, $\widehat{MCN}$ và $\widehat{MDN}$, $\widehat{MDN}$ và $\widehat{MAN}$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Chứng minh.



a. Không mất tổng quát ta có thể giả sử D nằm giữa M và C, B nằm giữa N và C. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có $\widehat{PQS} = \widehat{QBN} - \widehat{QCB} = \dfrac{1}{2}(\widehat{NBM} - \widehat{BCD}) = \dfrac{1}{2}\widehat{BMC}$.

Tương tự, $\widehat{PTS} = \dfrac{1}{2}\widehat{BMC}$. Do đó $\widehat{PTS} = \widehat{PQS}$. Kéo theo 4 điểm P, R, S, T cùng thuộc một đường tròn. Ta có đpcm.

b. Do Q là giao của phân giác góc MCB và MBN nên Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác MBC. Suy ra MQ là phân giác ngoài của góc BMC.

Tương tự, MT là phân giác ngoài của góc BMC. Do đó M, T, Q thẳng hàng.

Do T là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác MDA nên sử dụng cộng góc ta dễ dàng suy ra $\widehat{MTA} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{MDA} = \widehat{QBA}$.

Do đó tứ giác $TQBA$ nội tiếp. Ta suy ra $MT.MQ = MA.MB$ hay M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Tương tự, N nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Suy ra $MN \perp OI$.

Để chứng minh O, I, E thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $OE \perp MN$. Đây là một kết quả quen thuộc có tên là định lý Brocard. Có nhiều cách để chứng minh kết quả này. Ở đây chúng tôi giới thiệu cách giải bằng cực và đối cực.

Do AC giao BD tại E nên E lần lượt nằm trên đường đối cực của M, N đối với đường tròn (O). Suy ra MN là đường đối cực của E đối với (O), từ đó $OE \perp MN$. Vậy ta có đpcm.

Nhận xét. Bài số 3 là một bài toán không khó nhưng khá thú vị. Câu a tương đối đơn giản, chỉ cần những biến đổi góc thông thường và không cần điều kiện tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Câu b đòi hỏi sử dụng định lý Brocard nhưng đây là một kết quả quen thuộc. Chứng minh $OI \perp MN$ bằng cách sử dụng phương tích cũng là hướng đi đơn giản và tự nhiên. Tuy nhiên, ý tưởng của bài toán không mới, nó bắt nguồn từ bài toán 2978 trên tạp chí Crux Mathematicorum năm 2004 volume 30.

2 Khai thác bài toán

Chúng ta nhận thấy câu a của bài toán không dùng đến điều kiện "tứ giác ABCD nội tiếp". Điều đó có nghĩa là nó vẫn đúng trong trường hợp tứ giác $ABCD$ bất kì. Một cách tương tự, bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh các kết quả sau đây:

Cho tứ giác $ABCD$ bất kì thì:

4 phân giác trong góc A, B, C, D cắt nhau tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_1).

4 phân giác ngoài góc A, B, C, D cắt nhau tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_2).

2 phân giác trong góc A, C cắt 2 phân giác ngoài góc B, D tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_3).

2 phân giác trong góc B, D cắt 2 phân giác ngoài góc A, C tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_4).

2 phân giác trong góc A, B cắt 2 phân giác ngoài góc C, D tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_5).

2 phân giác trong góc B, C cắt 2 phân giác ngoài góc D, A tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_6).

2 phân giác trong góc C, D cắt 2 phân giác ngoài góc A, B tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_7).

2 phân giác trong góc D, A cắt 2 phân giác ngoài góc B, C tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_8).

Chúng ta sẽ không chứng minh lại các kết quả trên mà sẽ bàn đến những tính chất xoay quanh 8 đường tròn.

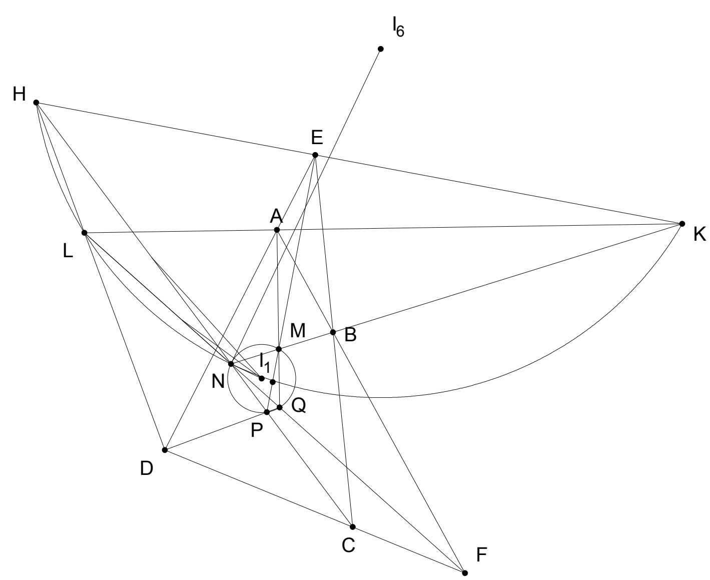
Tính chất 1. Bốn điểm I_1, I_2, I_3, I_4 thẳng hàng trên đường thẳng d (ta gọi bốn đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ là bộ đường tròn ω_1). Bốn điểm I_5, I_6, I_7, I_8 thẳng hàng trên đường thẳng l (ta gọi bốn đường tròn $(I_5), (I_6), (I_7), (I_8)$ là bộ đường tròn ω_2). Đồng thời $d \perp l$.

Chứng minh.

Theo cách định nghĩa trên, ta thấy rằng hai đường tròn bất kì (I_x) và (I_y) thuộc hai bộ ω_1 và ω_2 đều có một điểm chung. Do đó trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề 1. Hai đường tròn (I_x) và (I_y) trực giao (nghĩa là nếu gọi J là giao điểm của hai đường tròn thì $\widehat{I_xJI_y} = 90^o$).

Chứng minh bổ đề.



Ta chứng minh bổ đề với trường hợp (I_1) và (I_6) (Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự).

Kí hiệu d_X là phân giác trong góc X, l_X là phân giác ngoài góc X (X là các đỉnh của tứ giác $ABCD$).

Gọi M, N, P, Q, H, K, L lần lượt là giao điểm của các cặp $(d_A, d_B), (d_B, d_C), (d_C, d_D), (d_D, d_A), (d_C, l_D), (l_A, d_B), (l_A, l_D)$; E, F lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD.

Ta cần chứng minh $\widehat{I_1NI_6} = 90^o$.

Chú ý rằng M là tâm đường tròn bàng tiếp góc E của tam giác AEB nên $\widehat{AMB} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{AEB}$. Từ đó $\widehat{I_1NQ} = 90^o - \widehat{NMQ} = 90^o - \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AEB}$. (1)

Mặt khác, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AEB nên $\widehat{AKB} = \frac{1}{2}\widehat{AEB}$. Từ đó $\widehat{I_6NL} = 90^o - \widehat{LKN} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{AEB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{I_1NQ} + \widehat{I_6NL} = 90^o$.

Vậy $\widehat{I_1NI_6} = 90^o$.

Trở lại bài toán.

Theo bổ đề trên thì I_1N là tiếp tuyến kẻ từ I_1 tới đường tròn (I_6). Tương tự, I_1M, I_1P, I_1Q lần lượt là tiếp tuyến kẻ từ I_1 tới các đường tròn $(I_5), (I_7), (I_8)$. Vậy I_1 có cùng phương tích tới bộ đường tròn ω_2. Tương tự, I_2 có cùng phương tích tới tới bộ đường tròn ω_2. Nghĩa là I_1I_2 là trục đẳng phương của bộ bốn đường tròn ω_2, suy ra bốn điểm I_5, I_6, I_7, I_8 cùng nằm trên đường thẳng l vuông góc với I_1I_2. Tương tự ta cũng thu được I_1, I_2, I_3, I_4 thẳng hàng trên đường thẳng d. Vậy $d \perp l$. Ta có đpcm.

Nhận xét. Điều thú vị là bộ đường tròn ω_1 có chung trục đẳng phương l còn bộ đường tròn ω_2 có chung trục đẳng phương d.

Trước khi đến với tính chất 2, ta phát biểu lại điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$ như sau:

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AB và CD. Khi đó bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, CBF, CDE, ADF đồng quy tại một điểm J gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$.

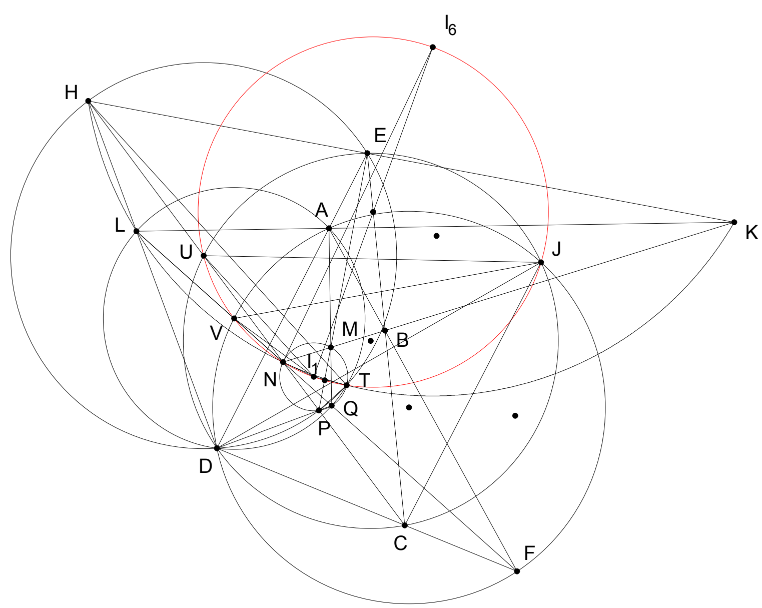
Tính chất 2. Sử dụng kí hiệu như lời giải tính chất 1. Ta có giao điểm của d và l là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$.

Chứng minh.

Trước tiên ta phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề 2. $\widehat{I_xJI_y} = 90^o$.

Chứng minh bổ đề.



Ta sẽ chứng minh bổ đề với $I_x \equiv I_1, I_y \equiv I_6$. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Gọi T là giao điểm thứ hai của (I_1) và (I_6). d_C cắt (EDC) lần thứ hai tại U, FL cắt (ADF) lần thứ hai tại V.

Do P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác EDC nên U là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác EPD. Mà $\widehat{HEP} = \widehat{HDP} = 90^o$ nên U là trung điểm HQ. Tương tự, V là trung điểm LQ.

Ta có $\widehat{HTN} = 90^o - \widehat{I_6NH}, \widehat{NTP} = 90^o - \widehat{I_1NP}$.

Suy ra $\widehat{HTP} = \widehat{HTN} + \widehat{NTP} = 180^o - \widehat{I_6NH} - \widehat{I_1NP} = \widehat{I_1NI_6} = 90^o$.
Từ đó $\widehat{NUT} = 2\widehat{NHT} = \widehat{NI_6T}$. Suy ra U nằm trên (NI_6T) hay đường tròn đường kính I_6I_1.
Tương tự, V nằm trên đường tròn đường kính I_6I_1.
Ta có $\widehat{UJV} = \widehat{UJD} - \widehat{VJD} = \widehat{DCU} - \widehat{DFV} = \widehat{PNQ} = \widehat{VNU}$.
Vậy J nằm trên đường tròn đường kính I_6I_1. Suy ra $\widehat{I_1JI_6} = 90^o$.
Trở lại bài toán.
Theo bổ đề 2, ta có $\widehat{I_1JI_6} = 90^o$. Tương tự ta cũng có $\widehat{I_1JI_5} = 90^o$. Vậy ba điểm I_5, I_6, J thẳng hàng hay $J \in l$. Tương tự, $J \in d$. Vậy J là giao điểm của d và l.

Tính chất 3. Kí hiệu Γ_1 là phương tích từ J tới bộ đường tròn ω_1, Γ_2 là phương tích từ J tới bộ đường tròn ω_2. Khi đó $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.
Chứng minh.
Từ bổ đề 1 và 2 ta có $\widehat{I_1NI_6} = \widehat{I_1JI_6} = 90^o$.
Suy ra $I_1N^2 + I_6N^2 = I_1I_6^2 = I_1J^2 + I_6J^2$ hay $I_1J^2 - I_1N^2 + I_6J^2 - I_6N^2 = 0$.
Vậy $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.

Lời bàn. Ta quay lại bài số 3 VMO 2012. Trong trường hợp này, tâm của bộ đường tròn ω_1 nằm trên đường thẳng OE. Gọi J là giao của (NAB) và MN. Dễ dàng chứng minh được tứ giác $MJAD$ nội tiếp hay J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Theo tính chất 2, J là giao điểm của OE và l. Theo định lý Brocard, $OE \perp MN$ vậy $MN \equiv l$. Ta thu được tâm của bộ đường tròn ω_2 nằm trên đường thẳng MN.
Như vậy, từ một bài toán tưởng chừng đơn giản, nếu biết đào sâu suy nghĩ chúng ta có thể tìm ra được nhiều điều thú vị ẩn chứa bên trong nó.
Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn thầy **Trần Quang Hùng**, GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội vì những trao đổi quý báu của thầy cho bài toán mở rộng.

Tài liệu

[1] n.v.thanh, *Kỳ Thi Chọn HSGQG Môn Toán 2012 - Đề Bài, Lời Giải và Đáp Án, Mathscope topic 27785* http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=27785

Email: lovemathforever@gmail.com